José Luis Lerma García

PROBLEMAS DE FOTOGRAMETRÍA I

Versión electrónica (revisada)

Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Geodésica, Cartográfica y Topográfica

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Depósito Legal: V-3975-1999 I.S.B.N.: 84-7721-804-8

© José Luis Lerma García

PRÓLOGO

El presente libro de problemas se enmarca dentro de la asignatura troncal de Ingeniería Técnica Topográfica, denominada "Fotogrametría I". Los objetivos del mismo son varios: en primer lugar, servir de apoyo a la docencia; en segundo lugar, facilitar la comprensión de una asignatura teórica como es la Fotogrametría; y, en tercer lugar, profundizar los conocimientos y el adiestramiento en esta materia.

Puesto que la Fotogrametría es una ciencia que hace uso de múltiples técnicas y disciplinas, para afrontar con éxito esta asignatura, se supone que ya se poseen los conocimientos y herramientas básicas relativas a materias como: álgebra, cálculo, trigonometría, geometría, óptica, física, etc. Aunque el proceso de resolución de los problemas está explicado, si se desea profundizar en sus fundamentos teóricos, se adjunta al final del libro la bibliografía recomendada.

El primer tema analiza los problemas típicos de óptica que deberían tenerse presente en cualquier trabajo que emplee técnicas fotográficas o fotogramétricas. El segundo tema trata problemas de fotogrametría aérea en el supuesto más elemental, es decir, cuando la fotografía se encuentra en posición vertical. El tercer tema sigue la misma línea, pero incluye el concepto de paralaje estereoscópico, trabajando ahora con pares de fotografías.

El cuarto tema se basa en la medición de coordenadas utilizando monocomparadores y en las correcciones a realizar para eliminar o mitigar los errores en la medición de las fotocoordenadas. En este tema, se emplea especialmente la transformación de coordenadas afín bidimensional. El objeto que se persigue es pasar de coordenadas cliché (o digitales) a fiduciales, de fiduciales a transformadas y de transformadas a imagen.

El bloque temático formado por los temas del quinto al séptimo está destinado a la fotogrametría terrestre. El tema quinto aborda problemas de toma fotogramétrica en diversas situaciones. El tema sexto analiza el tipo de errores y la influencia de los mismos en la toma fotogramétrica terrestre. El tema séptimo desarrolla una serie de modelos a seguir para confeccionar un proyecto de levantamiento por fotogrametría terrestre.

Para finalizar, en el tema octavo se incluye una colección de problemas propuestos con sus respectivas soluciones.

Este libro de problemas se complementa con otros tres: "Problemas de Fotogrametría II", "Problemas de Fotogrametría III" y "Aerotriangulación: Cálculo y Compensación de un bloque fotogramétrico". En conjunto, los cuatro libros permiten dar al alumno de cursos de ingeniería y, en general, a cualquier tipo de técnico que trate o trabaje con técnicas afines, una visión práctica, sencilla y rigurosa, de cuestiones y aspectos dificilmente asimilables únicamente con libros de teoría.

Valencia, julio 1999

J. L. Lerma

ÍNDICE

TEMA 1. ÓPTICA		
	Ejercicio	. Ángulo de refracción
		2. Ángulo crítico
	Ejercicio 3	S. Ángulo de refracción
		Desplazamiento lateral
		5. Formación de la imagen y aumento
	Ejercicio 6	5. Formación de la imagen
	Ejercicio 7	1. Distancia focal
	Ejercicio 8	3. Poder de resolución de una lente en el eje óptico
	Ejercicio 9). Poder de resolución radial y tangencial
	Ejercicio 10). Profundidad de campo
		. Distancia hiperfocal
	Ejercicio 12	2. Profundidad de foco
T	EMA 2. FOT	OGRAFÍAS AÉREAS VERTICALES
	Ejercicio 13	8. Escala de una fotografía
	Ejercicio 14	. Altitud de un avión
	Ejercicio 15	5. Escala máxima, mínima y media
	Ejercicio 16	5. Distancia reducida
	Ejercicio 17	1. Altura y altitud de un punto
	Ejercicio 18	3. Altura de la cima de una montaña
). Altitud de una chimenea
	Ejercicio 20). Coordenadas fotográficas corregidas
		del efecto orográfico
	Ejercicio 21	. Desplazamiento imagen
		2. Altitud de un avión
	Ejercicio 23	8. Error absoluto y relativo en la altura de vuelo
	Ejercicio 24	Diámetro de un cráter y error cometido
	Ejercicio 25	5. Acimut del eje de ordenadas y
		acimut de la línea de vuelo
T	EMA 3. PAR	ALAJE ESTEREOSCÓPICO
	Ejercicio 26	5. Altitudes y distancia reducida entre puntos
	-	1. Altura de una torre

Ejercicio	29.	Altitud de vuelo
		Base de vuelo
		Base de vuelo
		Gráfica de corrección de paralaje
Ejercicio	33.	y altitud de un punto Error absoluto y relativo en la altitud de un punto
	(FD	rcián, conduccián v to incrodur cián de
		ICIÓN, CORRECCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE RDENADAS FOTO
Ejercicio	34.	Coordenadas cliché, distorsiones y
		obtención de coordenadas fiduciales
Ejercicio	35.	Coordenadas cliché y fiduciales, transformación
		afín 2D, matriz de afinidad, coordenadas
		transformadas y corregidas de distorsión de la lente
Ejercicio	36.	Coordenadas digitales y fiduciales, transformación
-		afin 2D, matriz de afinidad, coordenadas
		transformadas e imagen
TEMA 5. T	ОМ	A FOTOGRAMÉTRICA TERRESTRE
Ejercicio	37.	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
3		toma normal, giros y traslaciones entre sistemas
		de coordenadas
Eiercicio	38.	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
Ejererere	50.	toma convergente
Eiercicio	39	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
Ljererero	57.	toma convergente (por intersección directa)
Fiercicio	40	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
Ljerereio	+∪.	toma desviada (oblicua)
Fiercicio	⊿1	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
Ejercicio	71.	toma desviada a la derecha
Eigraigia	42	Cálculo de las coordenadas terreno en el caso de
Ejercicio	42.	toma convergente e inclinada
		toma convergente e inclinada
		VISIÓN DE ERRORES EN FOTOGRAMETRÍA RESTRE
Ejercicio	43.	Error planimétrico y altimétrico previsible
		en un punto
		Error planimétrico y altimétrico previsible en un punto
Ejercicio	45.	Errores máximos previsibles en la
		zona de recubrimiento estereoscónico

Ejercicio	46. Levantamiento de una ladera a escala 1:500
Fiercicio	para un proyecto de urbanización
Ejereieio	con constreñimientos geométricos en obra civil
EMA 8. E.	JERCICIOS PROPUESTOS
Ejercicio	I. Distancia reducida y orientación
Ejercicio	II. Coordenadas imagen corregidas del efecto
	orográfico y superficie reducida terreno
Ejercicio	III. Coordenadas cliché, distorsiones y
.	coordenadas fiduciales
Ejercicio	IV. Transformación afin 2D y parámetros
г	de la matriz de afinidad
Ejercicio	V. Coordenadas cliché, transformadas y
Diamaiaia	corregidas de distorsión del objetivo
Ejercicio	VI. Coordenadas cliché, fiduciales,
Eigraigia	transformadas e imagen VII. Toma convergente. Coordenadas terreno
Ejercicio	relativas y absolutas
Fiercicio	VIII. Toma desviada a la izquierda. Coordenadas
Ljereiero	Terreno
Ejercicio	IX. Toma convergente e inclinada. Coordenadas
Ljereiero	cliché, fiduciales, transformadas y terreno
Eiercicio	X. Levantamiento fotogramétrico terrestre de la
	fachada y la torre de una iglesia

TEMA 1 *ÓPTICA*



EJERCICIO 1.

Calcular el ángulo de refracción de un rayo de luz que atraviesa un cristal con índice de refracción de 1.730 a otro cristal que tiene un índice de refracción de 1.540. El ángulo de incidencia es de 60^g.

Solución:

Ley de Snell afirma que:

- a) El rayo incidente, la normal y el rayo refractado permanecen en un mismo plano (Fig. 1).
- b) $n \operatorname{sen} i = n' \operatorname{sen} R$

por lo tanto si nos piden el valor del ángulo de refracción, R, tendremos que:

$$\operatorname{sen} R = \frac{n}{n!} \operatorname{sen} i$$

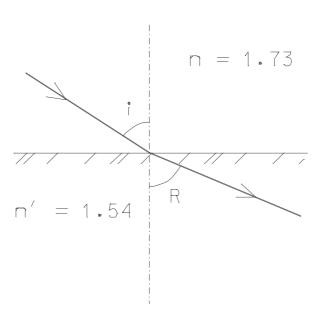


Fig. 1. Refracción de un rayo de luz

en donde sustituyendo datos llegamos a que:

$$\operatorname{sen} R = \frac{1.73}{1.54} \operatorname{sen} 60^g = 0.998831 \implies R = 72^g.6047$$

EJERCICIO 2.

Encontrar el ángulo crítico en un rayo de luz que pasa de un cristal con índice de refracción de 1.730 a otro cristal con índice de refracción de 1.540.

Solución:

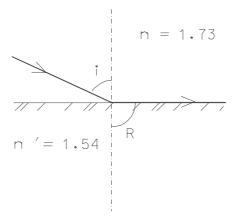


Fig. 2. Condición de ángulo crítico

Tal y como aparece en la Fig. 2, esta situación sucede en un medio en el que n > n' y el ángulo de refracción, R, es igual a 100^g .

Aplicando la ley de Snell, llegamos a que el valor del ángulo crítico es:

sen
$$i = n'/n = 1.54 / 1.73 \implies i = 69^{g}.8834$$

EJERCICIO 3.

Calcular el ángulo de refracción de un rayo de luz que pasa del aire a un cristal que tiene un índice de refracción de 1.60. El ángulo de incidencia es de $30^{\rm g}$ y se supone que el índice de refracción del aire es de 1.0003.

Solución:

Sustituyendo datos en la fórmula de la Ley de Snell, en nuestro caso (Fig. 3) tenemos que:

$$1.0003 \ sen \ 30^g = 1.60 \ sen R$$

por tanto, el ángulo de refracción es igual a:

$$R = 18^{g}.3210$$

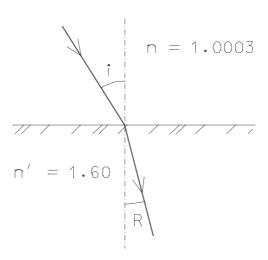


Fig. 3. Refracción de un rayo de luz que pasa de aire a cristal

EJERCICIO 4.

Un rayo de luz en el aire se dirige con un ángulo de incidencia de 67^g hacia una placa de vidrio plano paralela de 6 mm de espesor. El índice de refracción del aire es 1.0003, y el del vidrio 1.520.

¿Cuál será el desplazamiento lateral producido en el rayo de luz al atravesar la placa y encontrarse de nuevo con el aire?

Solución:

El desplazamiento lateral, h, viene definido según la expresión:

$$h = e \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{n \cos i}{n' \cos R} \right) \tag{1}$$

siendo e el espesor de la placa de vidrio plano paralela (Fig. 4).

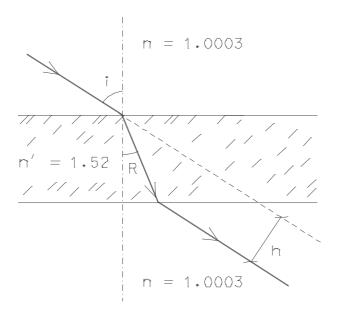


Fig. 4. Refracción en una placa de vidrio plano paralela

Como en la expresión del desplazamiento lateral no conocemos el valor del ángulo de refracción, R, utilizando la Ley de Snell y despejando, alcanzamos un valor:

$$R = 38^{g}.7385.$$

Por tanto, sustituyendo datos en (1) llegamos a que el desplazamiento lateral es:

$$h = 3.141 \ mm$$

EJERCICIO 5.

La distancia focal de una lente delgada es de 120 mm. Un objeto se encuentra situado a 25 m delante de la lente.

Calcular:

- A. Dónde se forma la imagen.
- B. Cuál es el aumento producido.

Solución:

A. Dónde se forma la imagen.

La fórmula de la lente relaciona la distancia objeto, p, y la distancia imagen, q, conocida la distancia focal de la lente, f, según:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{2}$$

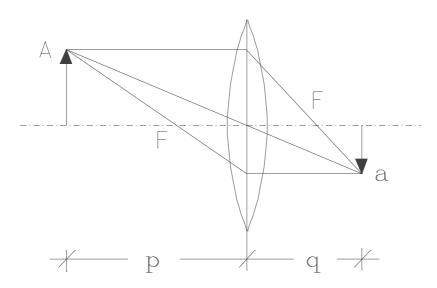


Fig. 5. Distancia imagen (p), objeto (q) y focos (F) de una lente delgada

La distancia a la que se forma la imagen a de un objeto A en el plano focal viene materializada por el valor de la distancia imagen, q (Fig. 5). Así pues, despejando q en la fórmula de la lente (2), tenemos que:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = 8.2933333333 m. \implies q = 0.120579 m. \equiv 120.579 mm.$$

B. Cuál es el aumento producido.

El aumento establece las siguientes relaciones:

$$A = \frac{tamaño \ imagen}{tamaño \ objeto} = \frac{q}{p}$$

Consecuentemente, el aumento es:

$$A = 0.005$$
 (Reducción)

EJERCICIO 6.

La distancia focal de una lente delgada es de 120 mm y deseamos que la imagen resultante tenga un tamaño mitad que la del objeto.

Calcular:

- A. A qué distancia se debería encontrar el objeto delante de la lente.
- B. Dónde se formará la imagen resultante.

Solución:

A. A qué distancia se debería encontrar el objeto delante de la lente.

Con los datos del ejercicio, se debe cumplir que:

$$q = \frac{p}{2}$$

y sustituyendo en la fórmula de la lente (2) se obtiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{2}} = \frac{1}{f} \implies p = 3 \cdot f = 360 \, mm.$$

B. Dónde se formará la imagen resultante.

Evidentemente, la imagen se formará a una distancia de la lente igual a:

$$q = \frac{p}{2} = 180 \, mm.$$

EJERCICIO 7.

Se conocen los dos radios de curvatura de una lente, siendo sus valores: $r_1 = 152 \text{ mm y } r_2 = 176.2 \text{ mm}$. El índice de refracción del cristal es 1.680

Calcular:

- A. La distancia focal de la lente delgada.
- B. La distancia focal de la lente gruesa, si el espesor de la misma es de 8 mm.

Solución:

A. Distancia focal de la lente delgada.

La distancia focal de una lente delgada viene definida por:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

siendo:

- n, Índice de refracción.
- f, Distancia focal.
- r₁, Radio de curvatura de la superficie izquierda de la lente (positivo si el centro cae a la derecha de la lente).
- r_2 , Radio de curvatura de la superficie derecha de la lente (positivo si el centro cae a la izquierda de la lente).

de modo que con los datos de este ejercicio, la distancia focal de la lente delgada es:

$$1/f = 8.33*10^{-3}$$
 \Rightarrow $f = 120.006 mm$

B. Distancia focal de la lente gruesa, si el espesor de la misma es de 8 mm.

La distancia focal en este caso viene definida por:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{(n-1) \cdot e}{n \cdot r_1 \cdot r_2} \right)$$

siendo e el espesor de la lente gruesa (Fig. 6).

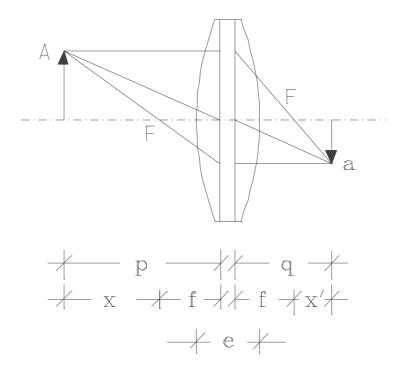


Fig. 6. Formación de la imagen de un objeto en una lente gruesa

Sustituyendo datos obtenemos la distancia focal de la lente gruesa:

$$1/f = 8.2507 \cdot 10^{-3} \implies f = 121.202 \ mm$$

EJERCICIO 8.

La abertura relativa del diafragma de una cámara puede tomar los valores: 2, 4, 8, 16 y 32.

Calcular el poder de resolución en el eje óptico de una lente prácticamente exenta de aberración para un haz de luz blanca ($\lambda = 0.5614~\mu$).

Solución:

El poder de resolución (*PR*) de una lente en el eje óptico se determina a partir de la siguiente expresión:

$$PR = \frac{1}{r} = \frac{1}{1.22\lambda \binom{f}{d}}$$
 lineas / mm.

siendo:

- r, Resolución de un lente sin aberración.
- f, Distancia focal.
- d, Diámetro del objetivo.
- λ , Longitud de onda de la luz empleada.

Simplificando la expresión anterior para un haz de luz blanca:

$$PR = \frac{1}{r} = \frac{1460}{D}$$
 líneas / mm.

siendo *D* la abertura relativa del diafragma (también conocida con las siglas inglesas "*f-stop*" o "*f-number*"). Según aumenta el diámetro del diafragma, el número f disminuye y la iluminación aumenta, y por consiguiente, el tiempo de exposición requerido para hacer una fotografía es menor.

Particularizando para los distintos valores de abertura relativa, tenemos:

$$D = 2 \rightarrow PR = 1460/2 = 730.0 \ lineas/mm$$
 $D = 4 \rightarrow PR = 1460/4 = 365.0 \ lineas/mm$
 $D = 8 \rightarrow PR = 1460/8 = 182.5 \ lineas/mm$
 $D = 16 \rightarrow PR = 1460/16 = 91.3 \ lineas/mm$
 $D = 32 \rightarrow PR = 1460/32 = 45.6 \ lineas/mm$

A partir de esta pequeña simulación, se puede comprobar fácilmente que según disminuye el diámetro del diafragma el poder de resolución de la lente disminuye; por el contrario, los efectos de aberración propios de la lente mejoran.

EJERCICIO 9.

Se dispone de la imagen de un objeto que se encuentra a 70 mm del punto principal. La distancia focal de la cámara es de 120 mm y la abertura relativa es de 4.

Calcular el poder de resolución radial y tangencial.

Solución:

El poder de resolución (*PR*) de una lente fuera del eje óptico (utilizando la expresión simplificada) viene definido por 2 valores, uno radial y otro tangencial.

- Poder de resolución radial:

$$PR \ radial = \frac{1}{r} = \frac{1460}{D} \cos \alpha \quad lineas / mm.$$

- Poder de resolución tangencial:

PR tangencial =
$$\frac{1}{r} = \frac{1460}{D} \cos \alpha^3$$
 líneas / mm.

siendo α el ángulo que se forma entre el eje óptico y la línea que une el punto nodal posterior con la imagen, es decir,

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{f}\right)$$

En nuestro caso, con los datos del ejercicio tenemos que:

$$\alpha = 33^{g}.6183$$

PR radial = 315.3 líneas/mm

PR tangencial = 235.2 líneas/mm

EJERCICIO 10.

Se dispone de una lente que tiene una distancia focal de 120 mm y el círculo de confusión tiene un diámetro de 0.050 mm.

Calcular la profundidad de campo en los siguientes casos:

- A. Para una distancia objeto igual a 5 m y 4 de abertura relativa.
- B. Para una distancia objeto igual a 5 m y 8 de abertura relativa.
- C. Para una distancia objeto igual a 25 m y 4 de abertura relativa.
- D. Para una distancia objeto igual a 25 m y 8 de abertura relativa.

Solución:

Con objeto de clarificar el cálculo de la profundidad de campo, P_RC , se muestra en la Figura 7 la disposición de un objeto A frente al plano focal de la cámara en tres posiciones distintas (A_L, A, A_C) :

La profundidad de campo, P_RC , se halla a partir de la siguiente sustracción de distancias objeto:

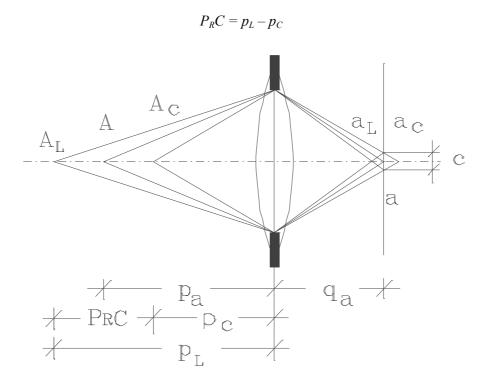


Fig. 7. Profundidad de campo de una lente

Además, las respectivas distancias objeto vienen definidas por las siguientes expresiones:

- Para un objeto en A_C:

$$p_C = \frac{p_a}{1 + (p_a - f)c D/f^2}$$
 (3)

siendo:

- p_a , La distancia objeto.
- f, La distancia focal.
- c, El diámetro del círculo de confusión.
- D, La abertura relativa del diafragma.
- Para un objeto en A_L:

$$p_L = \frac{p_a}{1 - (p_a - f)c D/f^2}$$

Por tanto, particularizando las expresiones exteriores con los datos del enunciado, obtenemos:

A. Para una distancia objeto igual a 5 m y 4 de abertura relativa.

$$p_C = 4.683 m$$

$$p_L = 5.364 m$$

$$P_RC = 0.681 m$$

B. Para una distancia objeto igual a 5 m y 8 de abertura relativa.

$$p_C = 4.403 \text{ m}$$

$$p_L = 5.784 \text{ m}$$

$$P_R C = 1.381 \text{ m}$$

C. Para una distancia objeto igual a 25 m y 4 de abertura relativa.

$$p_C = 18.580 \text{ m}$$

$$p_L = 38.200 \text{ m}$$

$$P_R C = 19.620 \text{ m}$$

D. Para una distancia objeto igual a 25 m y 8 de abertura relativa.

$$p_C = 14.783 \text{ m}$$

$$p_L = 80.935 \text{ m}$$

$$P_R C = 66.152 \text{ m}$$

Obsérvese cómo la profundidad de campo aumenta según disminuye el diámetro del diafragma de la cámara, o bien al hacer mayor la distancia objeto.

EJERCICIO 11.

Se dispone de la una lente que tiene una distancia focal de 120 mm. La abertura relativa es igual a 4 y el círculo de confusión tiene un diámetro de 0.050 mm.

Calcular la distancia hiperfocal.

Solución:

La distancia hiperfocal, H, viene definida por:

$$H = \frac{f^2}{c \cdot D} + f$$

Sustituyendo datos alcanzamos un valor de distancia hiperfocal:

$$H = 72.12 \text{ m}$$

Este resultado significa que entre el intervalo $[72.12 - \infty]$ las imágenes de los objetos tendrán una nitidez mejor o igual que la impuesta por el tamaño del círculo de confusión.

EJERCICIO 12.

Se dispone de la una lente que tiene una distancia focal de 120 mm y el círculo de confusión tiene un diámetro de 0.050 mm.

Calcular la profundidad de foco en los siguientes casos:

- A. Para una distancia objeto igual a 5 m y 4 de abertura relativa.
- B. Para una distancia objeto igual a 5 m y 8 de abertura relativa.
- C. Para una distancia objeto igual a 25 m y 4 de abertura relativa.
- D. Para una distancia objeto igual a 25 m y 8 de abertura relativa.

Solución:

La profundidad de foco, P_RF (Fig. 8), viene definida por:

$$P_R F = 2 d$$

siendo:

$$d = \frac{c \, p \, D}{(p - f)}$$

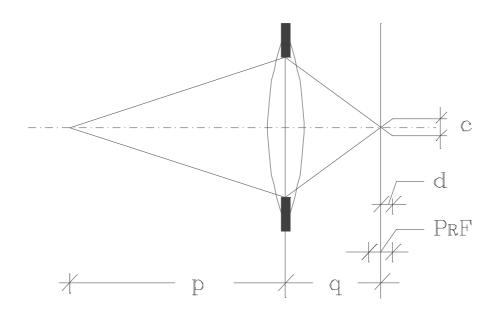


Fig. 8. Profundidad de foco de una lente

A. Para una distancia objeto igual a 5 m y 4 de abertura relativa.

$$d = 0.205 \ mm \rightarrow P_R F = 0.410 \ mm$$

B. Para una distancia objeto igual a 5 m y 8 de abertura relativa.

$$d = 0.410 \ mm \rightarrow P_R F = 0.820 \ mm$$

C. Para una distancia objeto igual a 25 m y 4 de abertura relativa.

$$d = 0.201 \ mm \rightarrow P_R F = 0.402 \ mm$$

D. Para una distancia objeto igual a 25 m y 8 de abertura relativa.

$$d = 0.402 \ mm \rightarrow P_R F = 0.804 \ mm$$

Por tanto, a la vista de los resultados, llegamos a la conclusión de que:

- La abertura relativa influye mucho más que la distancia objeto en la profundidad de foco.
- Existe una relación directa y proporcional entre el número f y la profundidad de foco.
- Si la distancia objeto aumenta, la profundidad de foco disminuye ligeramente.

TEMA 2 FOTOGRAFÍAS AÉREAS VERTICALES



EJERCICIO 13.

Se dispone de una fotografía vertical sobre un terreno prácticamente horizontal. La distancia focal es de 153 mm y la altura de vuelo sobre el terreno es de 2295 m.

Calcular la escala de la fotografía.

Solución:

La escala de la fotografía viene definida por la siguiente relación:

$$E = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{f}{H'}$$

siendo (Fig. 9):

- f, Distancia focal.
- H', Altura de vuelo sobre el terreno.
- \overline{ab} , Distancia sobre el fotograma.
- \overline{AB} , Distancia sobre el terreno.

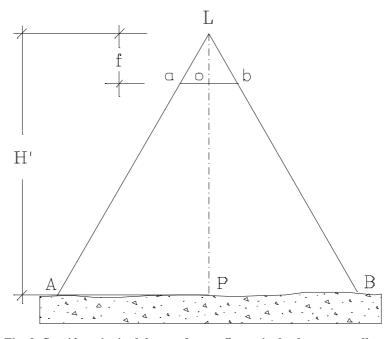


Fig. 9. Sección principal de una fotografía vertical sobre terreno llano

Por tanto, en este caso tenemos que la escala de la fotografía es igual a:

$$E = \frac{f}{H'} = \frac{0.153 \, m}{2295 \, m} = \frac{1}{15000}$$

EJERCICIO 14.

Sobre un mapa a escala 1:25000 se ha medido una distancia de 14 mm entre dos puntos situados a 800 m de altitud. Sus homólogos en una fotografía vertical distan 46 mm entre sí. La distancia focal es de 300 mm.

Calcular la altitud del avión.

Solución:

Para poder calcular la altitud del avión se requiere la altura de vuelo sobre el terreno, H', y la altitud media del terreno sobre el nivel del mar, h_{med} (Fig. 10).

La altura de vuelo la obtenemos a partir de la escala de vuelo, sabiendo que:

$$E = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{distancia \quad foto}{distancia \quad mapa} * escala del mapa = \frac{f}{H'}$$
 (4)

Así pues, sustituyendo en (4) las distancias medidas sobre la fotografía y sobre el mapa así como la escala del mapa, llegamos a que la escala de la fotografía es:

$$E = \frac{0.046}{0.014} * \frac{1}{25000} = \frac{1}{7608.7}$$

Despejando la altura de vuelo H' de (4), y agregándole la altitud media del terreno sobre el nivel del mar, $h_{med.}$, obtenemos la altitud del avión:

$$H' = f * m_b = 7608.7 * 0.300 = 2282.6 m$$

$$H = H' + h_{med} = 2282.6 m + 800 m = 3082.6 m$$

EJERCICIO 15.

La altitud sobre el nivel medio del mar (N.M.M.) del punto A es de 800 m y la del punto B es de 400 m. La altitud de la cámara fotogramétrica es de 3300 m y su distancia focal es de 152.4 mm.

Calcular la escala máxima, mínima y media.

Solución:

La escala en un punto del fotograma es función de la distancia existente entre el centro de proyección L y el punto del terreno. Si el terreno es montañoso y la toma fotogramétrica no es inclinada (Fig. 10), la relación de distancias varía, y por tanto, la escala hay que hallarla teóricamente para aquellos puntos que presenten distinta cota.

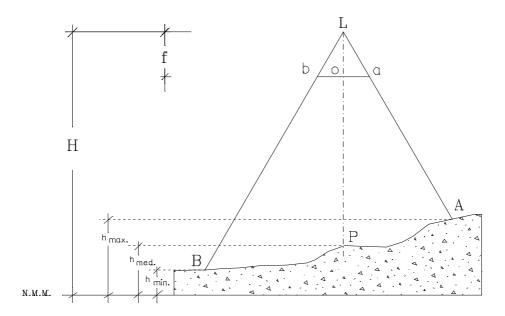


Fig. 10. Sección principal de un fotograma vertical sobre terreno montañoso

Con los datos del enunciado vamos a estudiar la variabilidad de escala entre el punto A (que presenta la mayor altitud sobre el nivel medio del mar) y el punto B (con la menor altitud). Finalmente deduciremos la escala media del fotograma.

$$E_{max.} = \frac{f}{H - h_A} = \frac{0.1524}{3300 - 800} = \frac{1}{16404.2} \equiv \frac{I}{D_{min.}}$$

$$E_{min.} = \frac{f}{H - h_B} = \frac{0.1524}{3300 - 400} = \frac{1}{19028.9} \equiv \frac{I}{D_{max.}}$$

La escala media se puede obtener por dos procedimientos: tomando la altitud media, o bien tomando la media de los denominadores de las escalas máxima y mínima.

$$E_{med.} = \frac{f}{H - h_{med.}} = \frac{0.1524}{2700} = \frac{1}{17716.55} = \frac{1}{\underline{D_{max.} + D_{min.}}}$$

EJERCICIO 16.

En una fotografía vertical con focal de 152.4 mm y altitud sobre el nivel del mar de 1381 m aparecen las imágenes de 2 puntos, a y b, con altitudes conocidas: $h_A = 204$ m y $h_B = 148$ m. Medidas sus coordenadas en un monocomparador tenemos:

$$x_a = -52.35 \text{ mmy }_a = -48.27 \text{ mm}$$

 $x_b = 40.64 \text{ mm}$ $y_b = 43.88 \text{ mm}$

Calcular la distancia reducida AB.

Solución:

El procedimiento va a consistir en obtener las coordenadas terreno de los puntos A y B, y una vez conocidas éstas, calcular la distancia reducida AB.

Las coordenadas terreno de los puntos A y B las calcularemos a partir de las coordenadas foto medidas en la fotografía vertical. Así pues, para el punto A:

$$X_A = x_a \left(\frac{H - h_A}{f} \right) = \frac{-52.35}{152.4} (1381 - 204) = -404.304 m.$$

$$Y_A = y_a \left(\frac{H - h_A}{f} \right) = \frac{-48.27}{152.4} (1381 - 204) = -372.794 m.$$

Para el punto *B*:

$$X_B = 328.800 \ m$$

$$Y_B = 355.013 \ m$$

Y la distancia reducida AB se obtiene fácilmente aplicando la fórmula:

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 1033.027 m.$$

EJERCICIO 17.

La cumbre (A) de una montaña y su pie (P) aparecen representados en una fotografía vertical, cuya escala en el centro es 1:10000 y la distancia focal es de 153 mm. El centro de la fotografía coincide con la imagen de P y la distancia oa es de 7.5 cm.

Calcular:

- A. La altura de la montaña sabiendo que sobre un mapa topográfico a escala 1:25000, PA = 2.2 cm.
- B. Si el altímetro del avión marcaba 2000 m, ¿cuál será la altitud del punto A?

Solución:

A. Altura de la montaña sabiendo que sobre un mapa topográfico a escala 1:25000, PA = 2.2 cm.

Tal y como se desprende de la Fig. 11, el cálculo de la altura de la montaña (sobre el punto principal P) implica, según el procedimiento empleado en el presente ejercicio, averiguar el segmento horizontal A'A'' que junto con el ángulo α permitirá hallar la altura AA'(h).

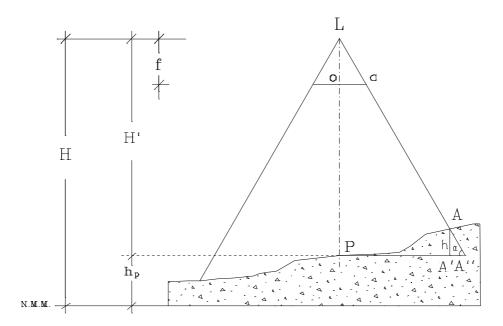


Fig. 11. Sección principal de una fotografía vertical en la que aparece representada la altura h del punto A (sobre P) y el ángulo de pendiente α

Por un lado, la obtención de la tangente del ángulo α es inmediata según:

$$tg \alpha = \frac{f}{oa} = \frac{0.153}{0.075} = 2.04$$

Por otro lado, el cálculo de la distancia *A'A''* (Fig. 11) se puede determinar restando las cantidades *PA''-PA'*:

$$E = \frac{f}{H'} \Rightarrow \frac{1}{10000} = \frac{0.153}{H'} \Rightarrow H' = 1530 \, m.$$

$$PA'' = \frac{H'}{\lg \alpha} = \frac{1530}{2.04} = 750 \, m$$
. (Distancia radial del punto A desde el punto principal)

Como a partir del mapa sabemos que:

$$PA' = 0.022 * 25000 = 550 m$$

el desplazamiento producido por el relieve (con respecto al plano de comparación que pasa por el centro de la fotografía) viene dado por:

$$A'A'' = PA'' - PA' = 200 m$$

y como

$$tg \alpha = \frac{A'A}{A'A''} = \frac{h_A}{A'A''} \implies h_A = \overline{A'A''} tg \alpha = 408 m.$$
 (Altura de la montaña)

B. Si el altímetro del avión marcaba 2000 m, ¿cuál será la altitud del punto A?

La altitud del punto *P* es igual a:

$$h_P = H - H' = 470 m$$

luego la altitud del punto A:

$$h_{A(NMM)} = h_P + h_A = 470 + 408 = 878 m$$

EJERCICIO 18

En el margen de un fotograma aéreo de 23 x 23 cm se leen los siguientes datos:

- Distancia focal 150 mm.
- Lectura del altímetro 3100 m.

Sobre el fotograma la distancia del punto principal al pie de la montaña es de 8 cm y a la cima de 12 cm.

La distancia del pie de la montaña a la cima medida en un mapa topográfico a escala 1:25000 es de 3 cm. La altitud de la llanura circundante alrededor del punto principal P es de 100 m.

Calcular la altura de la montaña.

Solución:

De manera similar a como se resolvió el ejercicio 17, el cálculo de la altura de la montaña en el punto C (sobre P) equivale a obtener los valores de distancia C'C'' y de ángulo α (Fig. 12).

Como bien es sabido, la altura de vuelo es igual a:

$$H' = 3100 - 100 = 3000 m$$

y la escala del fotograma (4):

$$E = \frac{f}{H'} = \frac{0.150}{3000} = \frac{1}{20000}$$

por lo tanto, se pueden calcular las distancias terreno a partir de las medidas realizadas en el fotograma, de modo que:

PP' = 0.08*20000 = 1600 m (Distancia del punto principal al pie de la montaña).

 $PC^{"}=0.12*20000=2400 m$ (Distancia del punto principal a la cabeza).

de donde se obtiene:

$$P'C'' = PC'' - PP' = 800 m$$

A partir del mapa topográfico a escala 1:25000 se sabe que:

$$P'C' = 0.03 * 25000 = 750 m$$

luego se puede calcular el desplazamiento producido por el relieve con respecto al plano de comparación que pasa por el centro del fotograma:

$$C'C'' = P'C'' - P'C' = 50 m$$

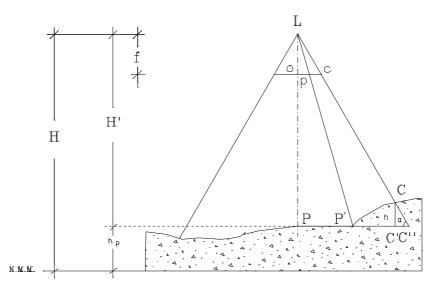


Fig. 12. Sección principal de una fotografía vertical en la que aparece representada la altura h del punto A (sobre P) y el ángulo de pendiente α

y como

$$tg \alpha = \frac{f}{oc} = \frac{0.150}{0.12} = 1.25$$

la altura del punto C se halla fácilmente a partir de la expresión:

$$h_C = \text{tg } \alpha * C'C'' = 62.50 m$$

EJERCICIO 19.

La imagen de una chimenea en una fotografía vertical tomada a 1500 m de altitud es de 4.5 mm. La distancia focal de la cámara es de 150 mm y la base de la chimenea está a 105 mm del punto nadiral.

Calcular la altitud de la chimenea.

Solución:

Sabiendo que el desplazamiento imagen, Δr , producido por el relieve en una fotografía vertical (Fig. 13) se determina a partir de la expresión (*Wolf, P.R.*, 1982¹):

$$\Delta r = \frac{r \cdot h}{H} \tag{5}$$

reordenando coeficientes y calculando el valor de la distancia radial, r, podemos ser capaces de hallar la altitud de la chimenea, h.

Así pues, primero tenemos que calcular la distancia radial desde el punto principal (o) hasta la parte superior de la chimenea:

$$r = r' + \Delta r = 105 + 4.5 = 109.5 \ mm$$

Posteriormente, hallaremos la altitud de la chimenea aplicando:

$$h = \frac{H \cdot \Delta r}{r} = \frac{1500 \cdot 0.0045}{0.1095} = 61.64 \, m.$$

-

¹ Capítulo 6. Apartado 8.

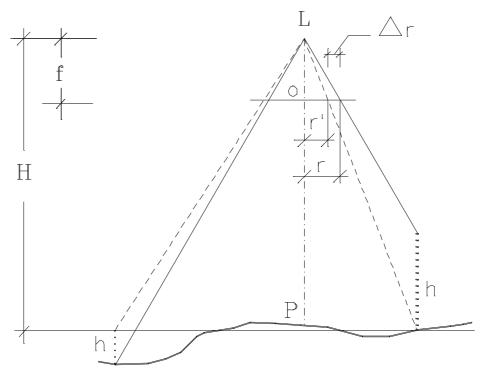


Fig. 13. Desplazamientos imagen producidos por el relieve o por objetos de altitud h sobre el plano de comparación.

EJERCICIO 20.

Sobre un fotograma a escala 1:30000 se han medido las coordenadas imagen de 3 puntos de los que se conocen sus altitudes. La lectura del altímetro es de 4590 m.

Punto	x (mm)	y (mm)	Z(m)
а	15.01	86.20	300
\boldsymbol{b}	-42.80	-90.02	150
\boldsymbol{c}	95.36	-74.36	230

Calcular las coordenadas fotográficas de sus proyecciones sobre el plano horizontal que sirve de referencia para medir la altitud del avión.

En este ejercicio se pide calcular las coordenadas x,y (en milimetros) referidas al plano de comparación Z = 0 m. Es decir, hay que corregir el desplazamiento producido por el relieve en el fotograma.

Como el incremento radial producido por el terreno se obtiene según (5) y la distancia radial es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en primer lugar se tiene que calcular la distancia radial corregida de dicho incremento, de modo que para cada punto tenemos:

$$r_a = 87.497 \ mm \rightarrow \Delta r_a = 5.719 \ mm$$

 $r_b = 99.677 \ mm \rightarrow \Delta r_b = 3.257 \ mm$
 $r_c = 120.925 \ mm \rightarrow \Delta r_c = 6.059 \ mm$

La distancia radial corregida del desplazamiento imagen producido por el terreno (Fig. 13) en cada uno de los puntos es:

$$r' = r - \Delta r$$

y sustituyendo datos:

$$r'_a = 81.778 mm$$

 $r'_b = 96.420 mm$
 $r'_c = 114.866 mm$

Una vez corregidas las distancia radiales, únicamente nos queda por calcular la nueva posición de los puntos en el fotograma. Este paso se consigue pasando de coordenadas polares a cartesianas.

A partir de los datos del enunciado, los ángulos que forman los puntos con respecto al eje de ordenadas del fotograma vienen dados por:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

y las coordenadas cartesianas corregidas por el desplazamiento producido por el terreno con respecto al plano de comparación seleccionado son:

$$x' = r' \operatorname{sen} \theta$$

 $y' = r' \operatorname{cos} \theta$

de modo que en los tres puntos pedidos:

$$\theta_a = 10^g.9754 \rightarrow x'_a = 14.029 \text{ mm}; \quad y'_a = 80.566 \text{ mm}$$

 $\theta_b = 228^g.2542 \rightarrow x'_b = -41.402 \text{ mm}; \quad y'_b = -87.079 \text{ mm}$
 $\theta_c = 142^g.1627 \rightarrow x'_c = 90.582 \text{ mm}; \quad y'_c = -70.634 \text{ mm}$

EJERCICIO 21.

Sobre un fotograma a escala 1:18000 y con una distancia principal de 153 mm, tenemos la imagen de un punto a 120 mm del centro del fotograma. Dicho punto coincide con la parte más baja de un monolito, cuya altitud es de 30 m. La altitud media del terreno es de 306 m.

Calcular el desplazamiento imagen que produce el monolito.

Solución:

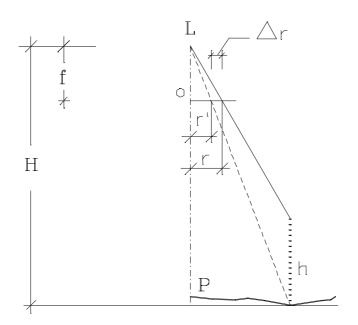


Fig. 14. Desplazamiento imagen Δr producido por el monolito de altura h

La altitud de vuelo viene definida por:

$$H' = f * m_b = 0.153 * 18000 = 2754 m$$

$$H = H' + h_{med} = 2754 + 306 = 3060 m$$

El desplazamiento radial en la imagen, Δr (Fig. 14), también se puede obtener aplicando directamente:

$$\Delta r = \frac{r' \cdot h}{H - h} = \frac{0.120 \cdot 30}{(3060 - 30)} = 1.2 \text{ mm}.$$

Obsérvese que a la hora de obtener el desplazamiento Δr , la fórmula anterior utiliza distintos parámetros que (5), concretamente r' en lugar de r.

EJERCICIO 22.

En un fotografía vertical de distancia focal 150 mm se han identificado los puntos a y b, con coordenadas fotográficas:

$$x_a = -75 \ mm$$
 $y_a = -90 \ mm$

$$x_b = -90 \text{ mm}$$
 $y_b = 30 \text{ mm}$

Si las altitudes de los puntos A y B son 60 m y 200 m respectivamente, y la distancia reducida entre ambos es de 825 m, ¿cuál es la altitud del avión?

Solución:

Conociendo la distancia reducida entre dos puntos (AB), se puede determinar con precisión la altitud de vuelo del avión en fotografías verticales aplicando:

$$(AB)^{2} = \left[\frac{x_{b}}{f}(H - h_{B}) - \frac{x_{a}}{f}(H - h_{A})\right]^{2} + \left[\frac{y_{b}}{f}(H - h_{B}) - \frac{y_{a}}{f}(H - h_{A})\right]^{2}$$

En la ecuación anterior, el único dato que desconocemos es la altitud de vuelo, H, que se puede obtener resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$aH^2 + bH + c = 0.$$

Así pues, sustituyendo y agrupando coeficientes:

$$0.65 H^2 - 139.6 H - 666749 = 0$$
 \Rightarrow $H_1 = 1125.863 m$

$$H_2 = -911.094 m$$

se selecciona como altitud del avión H_1 , y se desecha lógicamente la solución imposible, H_2 .

EJERCICIO 23.

La distancia reducida entre 2 puntos medidos en el terreno es de 1525 m \pm 0.30 m y la distancia imagen de dichos puntos en el fotograma es igual a 127 mm \pm 0.25 mm. El valor de la distancia focal calibrada de la cámara fotogramétrica es de 152.4 mm \pm 0.005 mm.

Calcular el error absoluto y relativo cometido en la determinación de la altura de vuelo.

Solución:

Si para calcular la altura de vuelo se utiliza la fórmula

$$H'=f\frac{\overline{AB}}{\overline{ab}}$$

diferenciando dicha expresión con respecto a cada una de sus componentes:

$$dH'_{AB} = \frac{f}{ab} dAB$$

$$dH'_{ab} = \frac{-f \cdot \overline{AB}}{\overline{ab}^2} dab$$

$$dH'_f = \frac{\overline{AB}}{\overline{ab}}df$$

y componiendo cuadráticamente cada uno de los errores accidentales, obtenemos el error absoluto cometido en la determinación de la altura de vuelo.

Así pues, aplicando las fórmulas anteriores al caso actual tenemos:

$$H' = 1830 m$$

 $dH'_{AB} = \pm 0.36 m$
 $dH'_{ab} = \pm 3.60 m$
 $dH'_{f} = \pm 0.06 m$

y el error absoluto es:

$$dH'_{Total} = \sqrt{dH'_{AB}^2 + dH'_{ab}^2 + dH'_{f}^2} = \sqrt{0.36^2 + 3.6^2 + 0.06^2} = 3.62 \text{ m}.$$

Una vez conocemos el error absoluto, el error relativo se halla según:

$$\varepsilon_r = \frac{dH'_{Total}}{H'} = 1.98 * 10^{-3} \approx 2000 \, p.p.m.$$

EJERCICIO 24.

Se tomó una fotografía vertical sobre una superficie lunar desde un satélite que tenía una altura de 97020 m, con una cámara que tenía una focal de 88.20 mm.

Se pide:

- A. ¿Cuál es el diámetro real del cráter si sabemos que en la fotografía el mismo mide 10.63 mm?
- B. ¿Cuál es el error cometido en el cráter si los errores aleatorios fueron de ± 0.1 mm para la distancia focal, ± 0.050 mm en la distancia medida en la fotografía y de ± 320 m en la altura de vuelo?

Solución:

A. ¿Cuál es el diámetro real del cráter si sabemos que en la fotografía el mismo mide 10.63 mm?

Según es conocido, la escala de la fotografía es igual a:

$$E = \frac{f}{H'} = \frac{0.0882}{97020} = \frac{1}{1100000}$$

por tanto, el diámetro del cráter mide (suponiendo buenos los datos):

$$D = 10.63 \cdot 10^{-6} * 1100000 = 11.693 \ km$$

B. ¿Cuál es el error cometido en el cráter si los errores aleatorios fueron de \pm 0.1 mm para la distancia focal, \pm 0.050 mm en la distancia medida en la fotografía y de \pm 320 m en la altura de vuelo?

En la expresión:

$$E = \frac{f}{H'} = \frac{d}{D} \implies D = \frac{d \cdot H'}{f}$$

si se diferencia D con respecto a cada una de sus componentes, se pueden calcular los errores absoluto y relativo cometidos. Consecuentemente:

$$dD_f = \frac{-d \cdot H'}{f^2} df$$

$$dD_d = \frac{H'}{f}dd$$

$$dD_{H'} = \frac{d}{f}dH'$$

obteniéndose un valor para cada una de las componentes:

$$dD_f = \pm 13.3 m$$

$$dD_d = \pm 55.0 m$$

$$dD_{H'} = \pm 38.6 \ m$$

y un error absoluto en la determinación del diámetro del cráter:

$$dD_{Total} = \sqrt{dD_f^2 + dD_d^2 + dD_{H'}^2} = \sqrt{13.3^2 + 55^2 + 38.6^2} = 68.5 \, m.$$

Una vez hallado el error absoluto, el error relativo es igual a:

$$\varepsilon_r = \frac{dD_{Total}}{D} = 5.86 * 10^{-3}$$

EJERCICIO 25.

Sobre un fotograma vertical a escala 1:5000 y con distancia focal de 210 mm se identifican las imágenes a y b de dos puntos A y B cuyas altitudes respectivas son 400 y 800 m. El acimut AB es de 150 grados centesimales.

Las coordenadas transformadas de ambos puntos son:

$$x_a = 24.2 \text{ mm}$$
 $y_a = -72.5 \text{ mm}$

$$x_b = 18.4 \text{ mm}$$
 $y_b = 91.8 \text{ mm}$

Se pide calcular los acimutes del eje de ordenadas y de la línea de vuelo.

Solución:

El problema se resuelve calculando la desorientación θ_Y existente entre el sistema de coordenadas foto (x,y) y el sistema de coordenadas terreno (X,Y). La desorientación es precisamente el acimut del eje de ordenadas (Fig. 15).

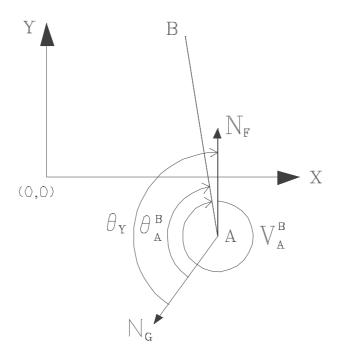


Fig. 15. Disposición de las coordenadas terreno A y B con respecto al Norte geográfico (N_G) y al Norte del fotograma (N_F)

Lo primero que se calculan son las coordenadas terreno de los puntos A y B para poder calcular la orientación V_A^B :

$$X_A = x_a \left(\frac{H - h_A}{f}\right) = 74.905 \, m.;$$
 $X_B = 21.905 \, m.$

$$Y_A = y_a \left(\frac{H - h_A}{f} \right) = -224.405 \, m.;$$
 $Y_B = 109.286 \, m.$

Orientación entre los puntos A y B:

$$V_A^B = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_B - X_A}{Y_R - Y_A}\right) = 389^g.9724$$

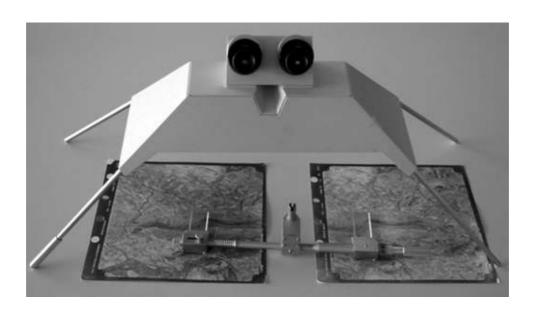
El acimut entre los puntos A y B es $\theta_{\scriptscriptstyle A}^{\scriptscriptstyle B}=150^{\rm g}$, luego la desorientación vale:

$$\theta_Y = \theta_A^B - V_A^B = 160^g.0276$$

y el acimut de la línea de vuelo se obtiene (suponiendo que la trayectoria del avión coincide con el eje x del fotograma) sumando 100^g a θ_Y

$$\theta_{LV} = \theta_{V} + 100^{g} = 260^{g}.0276$$

TEMA 3 PARALAJE ESTEREOSCÓPICO



EJERCICIO 26.

Disponemos de un par fotogramétrico vertical que tiene una altitud de vuelo de 1233 m, una focal de 152.4 mm y una base de 390 m.

Una vez orientados correctamente los fotogramas, las lecturas micrométricas de la barra de paralaje sobre los puntos principales (una vez posada la marca flotante sobre los mismos) son: 12.57 mm para el punto principal del fotograma izquierdo; y de 13.04 mm para el punto principal del fotograma derecho.

La paralaje del punto principal en el fotograma izquierdo, p_o , es de 93.73 mm (b'); en el fotograma derecho, p_o , es de 93.30 mm (b).

La lectura micrométrica de la barra de paralaje en el punto A es de 10.96 mm, y en el punto B es de 15.27 mm.

Las coordenadas foto (con respecto al eje de vuelo) y en el fotograma izquierdo son:

$$x_a = 53.41 \text{ mm}$$
 $y_a = 50.84 \text{ mm}$
 $x_b = 88.92 \text{ mm}$ $y_b = -46.69 \text{ mm}$

Calcular la altitud de los puntos A y B y la distancia reducida entre ambos.

Solución:

Este ejercicio se va a resolver utilizando las ecuaciones de paralaje. Para ello es necesario calcular la constante de la barra de paralaje, de manera que podamos conocer la paralaje de los puntos A y B.

La constante de la barra de paralaje, *C*, se va a determinar a partir de las lecturas micrométricas y de las medidas de paralaje realizadas sobre los puntos principales (fotograma izquierdo y fotograma derecho), adoptando la media de ambos valores como el valor de la constante de la barra de paralaje.

Así pues, en el punto principal del fotograma izquierdo tenemos:

$$C1 = b' - r_{01} = 93.30 - 12.57 \text{ mm}^2$$

y en el punto principal del fotograma derecho:

$$C2 = b - r_{02} = 93.73 - 13.04 \text{ mm}^3$$

 $^{^{2}}$ b' = Foto-base medida en el fotograma derecho.

 $^{^{3}}$ b \equiv Foto-base medida en el fotograma izquierdo.

La constante de la barra de paralaje es:

$$C = \frac{C1 + C2}{2} = 80.71$$
 mm.

Con este valor de la constante de la barra de paralaje, estamos en condiciones de calcular rápidamente la paralaje de cualquier punto (i), según:

$$p_i = C + r_i$$

de modo que:

$$p_a = C + r_a = 91.67 \ mm$$

$$p_b = C + r_b = 95.98 \ mm$$

La altitud de un punto se halla utilizando la expresión:

$$h_i = H - \frac{B \cdot f}{p_i} \tag{6}$$

por tanto para los puntos solicitados A y B:

$$h_A = 584.63 m;$$
 $h_B = 613.75 m$

Como paso previo al calculo de la distancia reducida entre ambos puntos, se tienen que hallar las coordenadas terreno de los dos puntos. Sabiendo que las coordenadas terreno se determinan según:

$$X_I = B \frac{x_i}{p_i}; \quad Y_I = B \frac{y_i}{p_i}$$

obtenemos:

$$X_A = 227.227 m$$
; $Y_A = 216.293 m$

$$X_B = 361.313 m$$
; $Y_B = -189.718 m$

y la distancia reducida:

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 427.579 \text{ m}.$$

EJERCICIO 27

Sobre un par fotogramétrico de focal 125 mm y base de vuelo 4200 m, se examina la imagen de una torre de telecomunicaciones situada en un punto tal que la altura de vuelo es de 5500 m.

¿Cuál será la altura de la torre si sabemos que la diferencia de paralaje entre la parte superior (s) e inferior (i) es de 2.35 mm?

Solución:

A partir de la fórmula de la diferencia de paralaje:

$$\Delta p = f \cdot B \left[\frac{1}{H - h_s} - \frac{1}{H - h_i} \right]$$

y adoptando como valor de la cota del punto inferior $Z = 0 \Rightarrow h_i = 0$ (Fig. 16), y simplificando la expresión anterior, llegamos a que el valor de la altura de la torre de telecomunicaciones es:

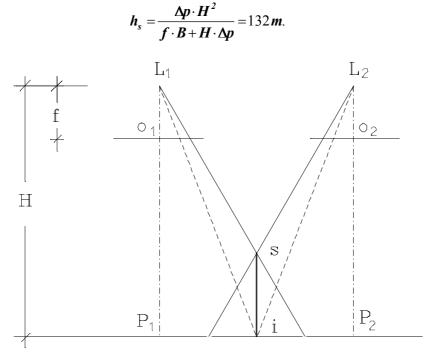


Fig. 16. Par estereoscópico de fotografías verticales en terreno llano en el que se muestran los rayos proyectivos de dos puntos, uno superior (s) y otro inferior (i)

EJERCICIO 28.

En un par fotogramétrico con altitud de vuelo de 3000 m y de distancia focal de 153 mm, se identifica un punto V de altitud igual a 600 m.

Con una barra de paralaje nos posamos y calculamos la paralaje de cinco puntos, obteniendo los siguientes valores:

$$p_a = 113.60 \text{ mm}$$
 $p_b = 111.69 \text{ mm}$
 $p_c = 126.31 \text{ mm}$ $p_d = 100.05 \text{ mm}$
 $p_v = 99.47 \text{ mm}$

Calcular la altitud de A, B, C y D.

Solución:

La altitud de cualquier punto (*I*) se puede determinar a partir de la altitud conocida de otro punto (*V*) si se conoce el incremento de paralaje entre ambos puntos, Δp_i :

$$h_I = h_V + \Delta p_i \frac{(H - h_V)}{p_i} \tag{7}$$

Así pues, calculando el incremento de paralaje en cada punto de cota desconocida y aplicando (7), obtenemos las alturas buscadas:

$$\Delta p_a = 14.13 \ mm$$
 $h_A = 898.521 \ m$ $\Delta p_b = 12.22 \ mm$ $h_B = 862.584 \ m$ $\Delta p_c = 26.84 \ mm$ $h_C = 1109.983 \ m$ $\Delta p_d = 0.58 \ mm$ $h_D = 613.913 \ m$

EJERCICIO 29.

Disponemos de un par estereoscópico obtenido con una cámara que tiene una distancia focal de 152.4 mm. La base de vuelo es de 700 m.

La altitud de un punto A es 400 m y la paralaje de dicho punto medido en el fotograma es 89.40 mm.

Calcular la altitud de vuelo.

Si se conoce la base de vuelo y la altitud de un punto de apoyo, la altitud de un par estereoscópico se puede calcular a partir de (6). Despejando la altitud de vuelo de la fórmula y sustituyendo datos:

$$H = h_A + \frac{B \cdot f}{p_a} = 400 + 700 \frac{0.1524}{0.0894} = 1593.289 \, m.$$

EJERCICIO 30.

Disponemos de un par estereoscópico obtenido con una cámara que tiene una distancia focal de 153 mm. La altitud es de 1620 m sobre el nivel del mar.

La altitud de un vértice geodésico identificado en el par es de 250.08 m y la paralaje medida en dicho punto es de 78.18 mm.

Calcular la base de vuelo.

Solución:

Despejando la base de vuelo a partir de (6) y sustituyendo datos, obtenemos directamente el valor de la base:

$$B = (H - h_I) \frac{p_i}{f} = (1620 - 250.08) \frac{78.18}{153} = 700.003 \, m.$$

EJERCICIO 31.

Se conoce la distancia reducida sobre el terreno de un segmento AB, siendo su longitud de 1500 m. Las coordenadas fiduciales de los puntos A y B son:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho
$$x_a = 38.38 \text{ mm} \quad y_a = 18.46 \text{ mm} \quad x'_a = -48.35 \text{ mm}; \quad x'_b = -52.34 \text{ mm}$$

$$x_b = 55.48 \text{ mm} \quad y_b = -112.21 \text{ mm}$$

Calcular la base de vuelo.

En primer lugar se calcula la paralaje del punto A y B:

$$p_a = x_a - x'_a = 86.73 mm$$

 $p_b = x_b - x'_b = 107.82 mm$

y posteriormente se emplea la fórmula que permite calcular la base de vuelo a partir de una distancia reducida, según la siguiente expresión:

$$B = \sqrt{\frac{AB^2}{\left(\frac{x_b}{p_b} - \frac{x_a}{p_a}\right)^2 + \left(\frac{y_b}{p_b} - \frac{y_a}{p_a}\right)^2}} = 1194.62 \, m.$$

EJERCICIO 32.

Disponemos de un par estereoscópico de fotografías verticales tomadas a una altitud de 2100 m. Las coordenadas (referidas a la foto izquierda) y lecturas de paralaje de 5 puntos de control altimétrico son:

Punto	x (mm)	y (mm)	Z(m)	r (mm)
1	20.01	20.00	346	20.81
2	95.88	90.00	315	19.22
3	5.31	86.25	327	19.86
4	15.32	-89.12	<i>361</i>	21.65
5	91.38	-91.56	<i>340</i>	20.57

Calcular:

- A. La gráfica de corrección de paralaje sabiendo que la constante de la barra de paralaje es igual a 62.4 mm.
- B. La altitud del punto 6 sabiendo que:

Punto	x (mm)	y (mm)	r (mm)	
6	35.23	-65.67	21.01	

A. Gráfica de corrección de paralaje sabiendo que la constante de la barra de paralaje es igual a 62.4 mm.

La generación de una gráfica de corrección de paralaje va a permitir obtener un mapa (plano) de isolíneas de corrección de paralaje a partir de unos cuantos puntos de control altimétrico. El fin de esta gráfica es poder efectuar mediciones de precisión con la barra de paralaje, en base a las correcciones obtenidas en una malla de puntos de control.

En este ejercicio se calcula el incremento de paralaje medido, $\Delta' p_i$, en los cinco puntos de control, tomando como referencia el punto 2 (punto de menor cota), de modo que el incremento de paralaje salga positivo en todos los puntos:

$$\Delta' p_i = r_i - r_2$$
 (Tabla 1, columna 2)

El incremento de paralaje teórico Δp_i también se calcula tomando el punto 2 de referencia, por medio de la fórmula:

$$\Delta p_i = \left(\frac{h_i - h_2}{H - h_i}\right) p_2$$
 (Tabla 1, columna 3)

Por último, se calculan las correcciones de paralaje a aplicar a cada uno de los puntos:

$$c_{2i} = \Delta' p_i - \Delta p_i$$
 (Tabla 1, columna 4)

Con estos valores puntuales, se construye la gráfica de corrección de paralaje (Fig. 17). Las correcciones a los incrementos de paralaje medidos en la gráfica permitirán obtener los valores de incremento de paralaje (supuestamente verdaderos) en cualquier punto interior a la malla.

Punto	$\Delta' p_i(mm)$	$\Delta p_i(mm)$	$c_{2i}\left(mm\right)$
1	1.59	1.443	0.147
3	0.64	0.552	0.088
4	2.43	2.159	0.271
5	1.35	1.159	0.191

Tabla 1. Incremento de paralaje medido, Δ ' p_i , calculado, Δ p_i , y corrección de paralaje en los puntos de control, c_{2i}

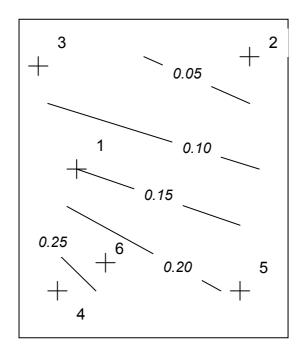


Fig. 17. Gráfica de corrección de paralaje, con isolíneas de valor c_{2i}

B. Altitud del punto 6.

Interpolando en la gráfica de corrección de paralajes (Fig. 17) tenemos para el punto 6:

$$c_{26} = 0.223 \ mm$$

Como:

$$\Delta' p_6 = r_6 - r_2 = 1.79 \text{ mm},$$

se tiene que la diferencia de paralaje corregida es igual a:

$$\Delta p_6 = \Delta' p_6 - c_{26} = 1.67 \ mm$$

y la altitud del punto 6 se obtiene de forma inmediata particularizando la fórmula (7):

$$h_6 = h_2 + \Delta p_6 \frac{(H - h_2)}{p_6} = 348.534 \, m.$$

EJERCICIO 33.

Se dispone de un par fotogramétrico que presenta los siguientes parámetros:

- Distancia focal: 152.4 mm.
- Altitud de vuelo: 1233 m.
- Base estereoscópica: 390 m.
- Paralaje medida de un punto A: 91.67 mm.

Se sabe que el error cometido en la determinación de la altitud de vuelo es de ± 1.5 m, en la base ± 1.5 m, y en la paralaje del punto $A \pm 0.03$ mm.

Calcular el error cometido en la determinación de la altitud del punto A utilizando las fórmulas de paralaje.

Solución:

Si la fórmula utilizada para calcular la altitud de un punto es la que aparece en (6), en este caso tenemos que la altitud del punto A es igual a:

$$h_A = H - \frac{B \cdot f}{p_a} = 1233 - \frac{390 \cdot 0.1524}{0.09167} = 584.631 \, m.$$

Ahora bien, los errores aleatorios cometidos los obtendremos diferenciando con respecto a cada una de las componentes que intervienen en el cálculo. De este modo:

$$dh_{H} = dH = \pm 1.5 m.$$
 $dh_{B} = -\frac{f}{p_{a}} dB = \pm 2.494 m.$
 $dh_{p} = \frac{B \cdot f}{p^{2}} dp_{a} = \pm 0.212 m$

El error absoluto en la determinación de la altitud del punto A es igual a la composición cuadrática de los errores anteriores:

$$dh_{Total} = 2.918 \ m$$

y el error relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{dh_{Total}}{h_A} = 4.991 * 10^{-3}$$

TEMA 4

MEDICIÓN, CORRECCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS FOTO



EJERCICIO 34.

Se ha realizado la medición de las coordenadas cliché de las marcas fiduciales y de un punto P, obteniéndose los siguientes resultados:

Punto	$x_K(mm)$	<i>y_K (mm)</i>
1	-56.971	107.670
2	-56.418	11.665
3	-94.695	<i>59.447</i>
4	-18.702	59.881
\boldsymbol{P}	-64.496	49.779

La distancia entre marcas fiduciales opuestas es de 76 mm y de 96 mm.

Calcular:

- A. La distancia y el acimut entre las marcas fiduciales opuestas.
- B. El factor de distorsión del fotograma en cada eje y el ángulo de distorsión entre los ejes.
- C. Las coordenadas del centro fiducial.
- D. Las coordenadas fiduciales del punto P.

Solución:

A. Distancia y acimut entre las marcas fiduciales opuestas.

Empezaremos calculando los incrementos de coordenadas entre las marcas fiduciales opuestas, puntos 1-2 y 3-4. Posteriormente hallaremos las distancias y los acimutes:

$$dx_{1,2} = x_2 - x_1 = 0.553 \ mm$$

$$dx_{1,2} = \sqrt{dx_{1,2}^2 + dy_{1,2}^2} = 96.006593 \ mm.$$

$$dy_{1,2} = y_2 - y_1 = -96.005 \ mm$$

$$dy_{1,2} = \arctan\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) = 199^g.6333036$$

$$dx_{3,4} = x_4 - x_3 = 75.993 \ mm$$

$$dy_{3,4} = y_4 - y_3 = 0.434 \ mm$$

$$dy_{3,4} = \arctan\left(\frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}\right) = 99^g.63642707$$

En este apartado, las distancias y ángulos se calculan con más decimales de lo normal porque se necesita la máxima precisión numérica en el apartado *B*.

B. Factor de distorsión del fotograma en cada eje y ángulo de distorsión entre los ejes.

Sabiendo por los resultados del apartado anterior cuales son los ejes mayor y menor, ahora ya estamos en condiciones de calcular las distorsiones correspondientes.

Distorsión del eje definido por las marcas fiduciales 1 y 2:

$$F_{1,2} = \frac{distancia\ calibrada}{distancia\ medida} = \frac{96}{d_{1,2}} = 0.9999313276$$

Distorsión del eje definido por las marcas fiduciales 3 y 4:

$$F_{3,4} = \frac{distancia \ calibrada}{distancia \ medida} = \frac{76}{d_{3,4}} = 1.000075805$$

Ángulo de distorsión entre ejes (falta de perpendicularidad entre ejes):

$$\delta = (\theta_{34} - \theta_{21}) - 100^g = 100^g \cdot .00312 - 100^g = 31^{cc} \cdot .2$$

C. Coordenadas del centro fiducial.

El punto queda materializado por la intersección de los ejes definidos por las marcas fiduciales opuestas.

Una manera de resolverlo es plantear las ecuaciones de las rectas que se ajustan a dichos ejes y resolver el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Procediendo de esta manera tenemos que:

$$r_{1,2} = 96.005 x + 0.553 y + 5409.959345 = 0$$

$$r_{3,4} = 0.434 x - 75.993 y + 4558.653501 = 0$$

Coordenadas del centro fiducial:

$$x_{C.F.} = -56.694 \ mm$$

 $y_{C.F.} = 59.664 \ mm$

D. Coordenadas fiduciales del punto P.

El sistema de coordenadas fiduciales presenta como origen el centro fiducial y como orientación la definida por las marcas fiduciales (Fig. 18-I). Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es calcular la posición del punto *P* con respecto al centro fiducial:

$$dx_{C.F.,P} = x_P - x_{C.F.} = -7.802 \ mm$$

 $dy_{C.F.,P} = y_P - y_{C.F.} = -9.885 \ mm$

que pasadas a coordenadas polares dan como resultado:

$$\boldsymbol{\theta}_{C.F.,P} = \operatorname{arctg}\left(\frac{dx_{C.F.,P}}{dy_{C.F.,P}}\right) = 242^{g}.53689$$

$$d_{C.F.,P} = \sqrt{dx_{C.F.,P}^2 + dy_{C.F.,P}^2} = 12.59303 \text{ mm}$$

El sistema de coordenadas cliché rara vez coincide (a no ser que se persiga y que las condiciones sean ideales) con el sistema de coordenadas fiduciales. Inicialmente existirá una rotación, un desplazamiento en el origen de coordenadas (Fig. 18-I), y una falta de perpendicularidad entre ejes (Fig. 18-II).

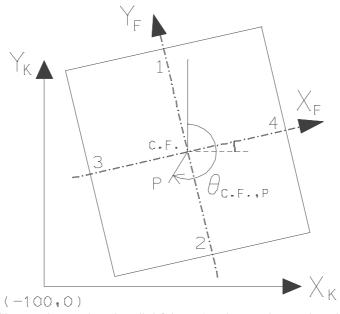


Fig. 18-I. Sistema de coordenadas cliché (x_K, y_K) y sistema de coordenadas fiducial (x_F, y_F) . Coordenadas polares del punto P sin corrección de desorientación

Una vez definido el centro fiducial habrá que corregir la desorientación existente entre el sistema de coordenadas cliché y el sistema de coordenadas fiduciales. De esta manera se conseguirá definir el sistema de coordenadas fiduciales, aunque las distorsiones continuarán existiendo (y por consiguiente, habrá que eliminarlas).

El acimut existente entre el centro fiducial y el punto *P* en el sistema de coordenadas fiduciales es igual a:

$$V_{C.F..P} = \theta_{C.F..P} + (100^g - \theta_{3.4}) = 242^g.9005$$

Ahora que disponemos de las coordenadas polares corregidas de desorientación y están definidas (teóricamente) en el sistema de coordenadas fiduciales, ya podemos pasar de coordenadas polares a coordenadas cartesianas. Para el punto *P*:

$$x'_P = -7.8583 \ mm$$

$$y'_P = -9.8403 \ mm$$

Para eliminar los errores sistemáticos detectados en el sistema de coordenadas fiduciales (apartado *B*), se tendrá que corregir la falta de perpendicularidad entre ejes y el defecto propio de expansión/contracción de la película en cada eje.

La expresión matemática que permite la corrección por falta de perpendicularidad entre ejes (δ) es:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \delta \\ 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Por criterios de signos en la expresión anterior, δ toma el signo negativo - δ ya que $(\theta_{3,4}$ - $\theta_{2,1}) > 100^g$ (Fig. 18-II). Así pues, tenemos:

$$x''_P = -7.8578 \ mm$$

$$y''_P = -9.8403 \ mm$$

Finalmente, aplicando el factor de distorsión correspondiente a cada eje llegamos a que las coordenadas fiduciales del punto *P* resultan:

$$x_{Fp} = x'''_P = F_{3,4} * x''_P = -7.8584 \ mm \cong -7.858 \ mm$$

$$y_{F_p} = y'''_P = F_{1,2} * y''_P = -9.8396 \ mm \cong -9.840 \ mm$$

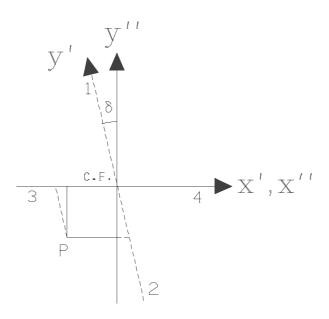


Fig. 18-II. Sistema de coordenadas no ortogonal (x', y') y ortogonal (x'', y''). La falta de perpendicuridad en x', y' es δ

EJERCICIO 35.

En un monocomparador se han medido las coordenadas cliché de las marcas fiduciales de una diapositiva de formato 9 x 12 cm que se encontraba en el portaplacas, así como la coordenada de un punto P.

Sabiendo que las coordenadas son:

Punto	$x_F(mm)$	y _F (mm)	$x_K(mm)$	<i>y _K (mm)</i>
1	0.000	48.000	-56.971	107.670
2	0.000	48.000	-56.418	11.665
3	-38.000	0.000	-94.695	<i>59.447</i>
4	38.000	0.000	-18.702	59.881
P			-64.496	49.779

Se pide:

- A. Calcular la transformación que liga las coordenadas cliché con las coordenadas fiduciales.
- B. Obtener los parámetros de la matriz de afinidad.
- C. Calcular las coordenadas fiduciales del punto P.
- D. Si las coordenadas del punto principal de la cámara referidas al sistema de coordenadas fiduciales son:

$$x_0 = -0.016 \text{ mm}$$
 $y_0 = 0.022 \text{ mm}$

Calcular las coordenadas transformadas del punto P.

E. Sabiendo que la distorsión radial de la lente se ajusta a la siguiente función polinómica:

$$\Delta r = k_1 r + k_2 r^3 + k_3 r^5 + k_4 r^7$$
, siendo
 $k_1 = 1.99698 * 10^{-4}$; $k_2 = 1.94894 * 10^{-7}$
 $k_3 = -1.98046 * 10^{-11}$; $k_4 = 0.43325 * 10^{-15}$

calcular las coordenadas transformadas del punto P corregidas de distorsión de la lente.

Solución:

A. Calcular la transformación que liga las coordenadas cliché con las coordenadas fiduciales.

Recordando brevemente la teoría, diremos que la relación matemática que relaciona las coordenadas cliché con la coordenadas fiduciales es una transformación afín. Una transformación de este tipo presenta seis parámetros de transformación.

Como los parámetros de transformación no los conocemos, en este primer apartado determinaremos los seis coeficientes que permitirán vincular ambos sistemas de coordenadas.

La relación matemática entre el sistema de coordenadas cliché y el sistema de coordenadas fiduciales (Fig. 19) viene definida por dos ecuaciones del tipo:

$$X_F = Tx + a X_K + b Y_K$$

$$Y_F = Ty + c X_K + d Y_K$$
(8)

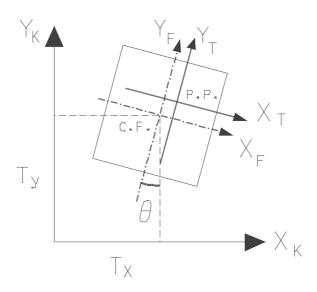


Fig. 19. Coordenadas cliché (x_K, y_K) , coordenadas fiduciales o foto (x_F, y_F) y coordenadas transformadas (x_T, y_T)

que escrito en forma matricial equivale a:

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para averiguar los seis coeficientes de transformación hay que redefinir la forma matricial, de modo que en el vector de incógnitas aparezcan precisamente los coeficientes: *Tx, Ty, a, b, c* y *d*.

Así pues, por cada punto del que se conozcan las coordenadas en ambos sistemas de coordenadas, se podrán plantear dos ecuaciones del tipo:

$$\begin{pmatrix}
X_{F} \\
Y_{F}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1 & X_{K} & Y_{K} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & X_{K} & Y_{K}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
T_{X} \\
a \\
b \\
T_{y} \\
c \\
d
\end{pmatrix}$$

$$K_{(2*punto,1)} = A_{(2*punto,6)} x_{(6,1)}$$
(9)

En nuestro caso, al disponer de 4 marcas fiduciales, se podrá formar un sistema de 8 ecuaciones con 6 incógnitas que se resolverá por el método de los mínimos cuadrados (variación de coordenadas), de modo que:

$$K_{8.1} + r_{8.1} = A_{8.6} x_{6.1}$$

obteniéndose el valor de los parámetros aplicando la expresión conocida:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T K$$

La matriz de residuos es igual a:

$$r = A x - K$$

El estimador a posteriori de la desviación típica de peso unidad:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{R}}}$$

y el estimador de la matriz varianza-covarianza de las incógnitas:

$$\boldsymbol{\sigma}_{xx}^2 = \boldsymbol{\sigma}_0^2 (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1}$$

Siguiendo la metodología descrita, con los datos de este ejercicio tenemos:

MATRIZ A

$$\begin{pmatrix} 1 & -56.971 & 107.670 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -56.971 & 107.670 \\ 1 & -56.418 & 11.665 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -56.418 & 11.665 \\ 1 & -94.695 & 59.447 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -94.695 & 59.447 \\ 1 & -18.702 & 59.881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18.702 & 59.881 \\ \end{pmatrix}$$

MATRIZ K

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 48 \\ 0 \\ -48 \\ -38 \\ 0 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ $(A^T \cdot A)$

1	4.000000	- 226.786000	238.663000	0.000000	0.000000	0.000000
	- 226.786000	15745.593394	- 13541.411667	0.000000	0.000000	0.000000
	238.663000	- 13541.411667	18848.581095	0.000000	0.000000	0.000000
İ	0.000000	0.000000	0.000000	4.000000	- 226.786000	238.663000
	0.000000	0.000000	0.000000	- 226.786000	15745.593394	- 13541.411667
(0.000000	0.000000	0.000000	238.663000	- 13541.411667	18848.581095

MATRIZ $(A^T \cdot A)^{-1}$

2.130573695	0.019589397	-0.012903943	0.000000000	0.000000000	0.000000000
0.019589397	0.000346308	0.000000756	0.000000000	0.000000000	0.000000000
- 0.012903943	0.000000756	0.000216988	0.000000000	0.000000000	0.000000000
0.000000000	0.000000000	0.000000000	2.130573695	0.019589397	- 0.012903943
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.019589397	0.000346308	0.000000756
0.000000000	0.000000000	0.000000000	- 0.012903943	0.000000756	0.000216988

MATRIZ $A^T \cdot K$

$$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 2887.734 \\ 16.492 \\ 0.000 \\ -26.544 \\ 4608.240 \end{pmatrix}$$

Estimador de la varianza a posteriori de peso unidad, $\sigma_0^2 = 0.000014126$

Valores de los **parámetros** (x) y desviaciones típicas (σ_{xx}):

Parámetro, $Tx = 56.35615514462 \ mm$; E.M.C. = $0.005486 \ mm$ Parámetro, a = 1.00005920989 E.M.C. = 0.000070Parámetro, b = 0.00576045468 E.M.C. = 0.000055Parámetro, $Ty = -59.98444923312 \ mm$; E.M.C. = $0.005486 \ mm$ Parámetro, c = -0.00571057187 E.M.C. = 0.000070Parámetro, d = 0.99991502320 E.M.C. = 0.000055

Residuos del ajuste:

R(1) = 0.002010 mm R(2) = 0.001738 mm R(3) = 0.002010 mm R(4) = 0.001739 mm R(5) = -0.002010 mm R(6) = -0.001738 mm R(7) = -0.002010 mm R(8) = -0.001739 mm

B. Obtener los parámetros de la matriz de afinidad.

Los coeficientes de la matriz de transformación anterior (incógnitas) se pueden descomponer en 6 parámetros de transformación:

- Tx = Traslación X existente entre el centro de coordenadas cliché y el centro fiducial.
- *Ty* = Traslación *Y* existente entre el centro de coordenadas cliché y el centro fiducial.
- $\theta = arctg \ (c/a) \equiv$ Giro existente entre el sistema de coordenadas cliché y el sistema de coordenadas fiducial.

- $\delta = \theta + arctg \ (b/d) \equiv$ Ángulo de falta de perpendicularidad entre ejes fiduciales.
- $Sx = a/\cos\theta \equiv$ Factor de escala en el eje $X \equiv$ Factor de distorsión eje X.
- $Sy = d/\cos(\theta \delta)$ = Factor de escala en el eje Y = Factor de distorsión eje Y.

En nuestro caso tenemos que los parámetros de la matriz de afinidad son:

Factor de escala *X*, Sx = 1.0000755141

Factor de escala Y, Sy = 0.9999316159

Giro, $\theta = -0^{g}.3635$

Ángulo de falta de perpendicularidad, $\delta = 0^{\rm g}.0032$

C. Calcular las coordenadas fiduciales del punto P.

Una vez que conocemos los valores de los coeficientes de la transformación afín bidimensional que liga la coordenadas cliché con la fiduciales, resulta obvio calcular las coordenadas fiduciales del punto *P* aplicando (8):

$$X_{Fp} = Tx + a X_{Kp} + b Y_{Kp} = -7.857 mm$$

 $Y_{Fp} = Ty + c X_{Kp} + d Y_{Kp} = -9.841 mm$ (10)

D. Calcular las coordenadas transformadas del punto P.

Las coordenadas transformadas (Fig 19,20) se calculan según:

$$X_T = X_F - X_O$$

$$Y_T = Y_F - Y_O$$

de modo que las coordenadas transformadas del punto P:

$$X_{T_p} = -7.857 + 0.016 = -7.841 \ mm$$

$$Y_{T_p} = -9.841 - 0.022 = -9.863 \text{ mm}$$

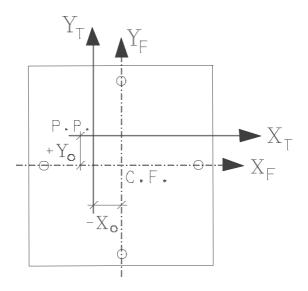


Fig. 20. Sistema de coordenadas fiduciales (x_F, y_F) y sistema de coordenadas transformadas (x_T, y_T)

E. Calcular las coordenadas transformadas del punto P corregidas de distorsión radial de la lente.

A partir de las coordenadas transformadas, se calcula la distancia radial del punto P, r_p , obteniéndose como resultado:

$$r_p = \sqrt{X_{Tp}^2 + Y_{Tp}^2} = 12.600 \, mm.$$

A partir de dicha distancia, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula polinómica que define la distorsión radial de la lente:

$$\Delta r_p = 1.99698*10^{-4} \ r_p + 1.94894*10^{-7} \ r_p^{\ 3} \ -1.98046*10^{-11} \ r_p^{\ 5} + 0.43325*10^{-15} \ r_p^{\ 7}$$

de donde:

$$\Delta r_p = 0.002889 \ mm \cong 3 \ \mu$$

Teniendo en cuenta que la distancia radial corregida de distorsión es igual a:

$$r' = r - \Delta r$$

resulta para el punto *P*:

$$r' = r_p - \Delta r_p = 12.600 - 0.003 = 12.597 \ mm$$

de modo que las coordenadas transformadas corregidas de distorsión radial de la lente son:

$$X'_{T} = \left(\frac{r'}{r}\right) X_{T}$$

$$X'_{Tp} = -7.839 \, mm$$

$$Y'_{T} = \left(\frac{r'}{r}\right) Y_{T}$$

$$Y'_{Tp} = -9.861 \, mm$$

EJERCICIO 36.

En un restituidor digital se desea realizar la orientación interna de un fotograma aéreo (formato 23 cm x 23 cm) escaneado a 28 µ. Para ello se han medido las coordenadas digitales de las ocho marcas fiduciales, así como de cinco puntos aislados, resultando:

Punto	x_D (pix.)	y_D (pix.)
1	8058.312	4138.518
2	7905.176	352.059
3	4118.647	219.162
4	332.340	372.827
5	200.446	4159.723
6	353.418	7945.601
7	4139.660	8078.856
8	7925.242	7925.929
100	412.751	7398.490
101	<i>3784.168</i>	7998.953
102	6524.136	785.448
103	5101.783	4997.219
104	1236.654	2812.721

Punto	$x_F(mm)$	$y_F(mm)$
1	110.002	0.002
2	105.998	106.003
3	0.002	110.006
4	-106.000	106.003
5	-109.998	0.003
6	-105.997	-106.001
7	-0.001	-110.014
8	106.000	-106.002

La altitud de vuelo es de 3542 m y la altitud media del terreno 485 m.

La distancia focal de la cámara es de 152.85 mm, y las coordenadas del punto principal de la cámara referidas al sistema de coordenadas fiduciales son:

$$x_0 = -0.003 \ mm$$

$$y_0 = 0.001 \, mm$$

La distorsión radial de la lente se ajusta a la siguiente función polinómica:

$$\Delta r = k_1 r + k_2 r^3 + k_3 r^5 + k_4 r^7$$

siendo:

- $k_1 = 1.94972*10^{-4}$
- $-k_2 = 1.92801*10^{-7}$
- $k_3 = -1.81860*10^{-11}$
- $k_4 = 3.19350*10^{-16}$

Calcular:

- A. La transformación que liga las coordenadas digitales con las coordenadas fiduciales.
- B. Los parámetros de la matriz de afinidad.
- C. Las coordenadas fiduciales de los cinco puntos: 100,101,102,103 y 104.
- D. Las coordenadas transformadas de los cinco puntos anteriores.
- E. Las coordenadas imagen de los cinco puntos anteriores.

Solución:

A. Transformación que liga las coordenadas digitales con las coordenadas fiduciales.

Del mismo modo que sucede en el ejercicio anterior, en este problema también se puede establecer una transformación afin entre las coordenadas digitales y las coordenadas calibradas de las marcas fiduciales.

Por cada punto, se pueden plantear dos ecuaciones del tipo:

$$X_F = Tx + a X_D + b Y_D$$

$$Y_F = Ty + c X_D + d Y_D$$
(11)

Tal y como sucede en la formación del sistema (9), por cada punto conocido en ambos sistemas de coordenadas se pueden plantear dos ecuaciones que tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_D & Y_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_D & Y_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tx \\ a \\ b \\ Ty \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Con los datos del enunciado, el sistema de ecuaciones tiene una dimensión:

$$K_{(16.1)} = A_{(16.6)} x_{(6.1)}$$

y la solución usual mínimo cuadrática es:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T K$$

$\mathbf{MATRIZ}\,A$

(1.0)	8058.312	4138.518	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	8058.312	4138.518
1.0	7905.176	352.059	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	7905.176	352.059
1.0	4118.647	219.162	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	4118.647	219.162
1.0	332.340	372.827	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	332.340	372.827
1.0	200.446	4159.723	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	200.446	4159.723
1.0	353.418	7945.601	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	353.418	7945.601
1.0	4139.660	8078.856	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	4139.660	8078.856
1.0	7925.242	7925.929	0.0	0.000	0.000
0.0	0.000	0.000	1.0	7925.242	7925.929

MATRIZ K

110.000 0.002 105.998 106.003 0.002 110.006 -106.000106.003 -109.9980.003 -105.997-106.001-0.001-110.014106.000 -106.002

MATRIZ $(A^T \cdot A)$

8.000	33033.241	33192.675	0.000	0.000	0.000
33033.241	224613231.422	137059654.537	0.000	0.000	0.000
33192.675	137059654.537	225962444.200	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	8.000	33033.241	33192.675
0.000	0.000	0.000	33033.241	224613231.422	137059654.537
0.000	0.000	0.000	33192.675	137059654.537	225962444.200

MATRIZ $(A^T \cdot A)^{-1}$

```
0.513355483027201 \ -0.000046807425171 \ -0.000047017690136
                                                                                0.000000000000000
                                                                                                    0.0000000000000000
 0.000046807425171
                                                                                                    0.000000000000000
                   0.000000011336088 \ - \ 0.0000000000000251
                                                            0.0000000000000000
                                                                                0.0000000000000000
                                                                                                    0.0000000000000000
- 0.000047017690136 - 0.0000000000000251
                                        0.000000011332313
                                                            0.00000000000000000
                                                                                0.0000000000000000
                                                            0.513355483027201 \ -0.000046807425171 \ -0.000047017690136
 0.0000000000000000
                    0.0000000000000000
                                        0.0000000000000000
 0.000000000000000
                     0.0000000000000000
                                        0.0000000000000000000000000000046807425171\\
                                                                                0.000000011336088 \quad - \ 0.000000000000251
 0.000000000000000
                     0.0000000000000000
                                        0.000000011336088
```

MATRIZ $A^T \cdot K$

$$\begin{pmatrix} 0.006 \\ 2469705.085 \\ -6587.101 \\ 0.000 \\ -6680.711 \\ -2470223.260 \end{pmatrix}$$

Resultados de la compensación:

- Estimador var. a priori obs. peso unidad = 1
- Estimador var. a posteriori obs. peso unidad = 0.000063431

Valores de los parámetros (incógnitas) y desviaciones típicas:

Parámetro, $Tx = -115.2877455398496 \ mm$ E.M.C. = $0.005706 \ mm$ Parámetro, a = 0.0279965143347 E.M.C. = 0.000001

Parámetro, b = -0.0000755480195 E.M.C. = 0.000001 Parámetro, $Ty = 116.4568986563533 \, mm$ E.M.C. = $0.005706 \, mm$ Parámetro, c = -0.0000751141775 E.M.C. = 0.000001 Parámetro, d = -0.0279933426433 E.M.C. = 0.000001

Residuos del ajuste (mm):

R(1) = 0.002245	R(2) = 0.001347
R(3) = 0.005030	R(4) = 0.004800
R(5) = 0.001457	R(6) = 0.006453
R(7) = -0.011550	R(8) = -0.007739
R(9) = 0.007785	R(10) = -0.005709
R(11) = 0.003452	R(12) = 0.007421
R(13) = -0.001037	R(14) = 0.005767
R(15) = -0.007383	R(16) = -0.009646

B. Parámetros de la matriz de afinidad.

Las incógnitas a,b,c,d obtenidas en el apartado A se pueden descomponer en 4 parámetros de transformación (tal y como se vio en el apartado B del ejercicio anterior), obteniéndose como valores:

```
Factor de escala X, Sx = 0.0279966151
Factor de escala Y, Sy = -0.0279934446
Giro, \theta = -0^g.1708
Ángulo de falta de perpendicularidad, \delta = 0^g.0010
```

Obsérvese como ambos factores de escala coinciden exactamente con el valor del escaneado del fotograma. Además, el ángulo de falta de perpendicularidad es prácticamente despreciable. Estos datos tan sobresalientes de deben a que el fotograma se obtuvo con una buena cámara métrica, la digitalización de los fotogramas se realizó con un escáner fotogramétrico de precisión geométrica $\pm 1\mu$., y el restituidor digital con el que se midieron las coordenadas es de primer orden.

C. Coordenadas fiduciales de los cinco puntos: 100, 101, 102, 103 y 104.

Las coordenadas fiduciales de los cinco puntos, una vez obtenidos los seis parámetros de transformación, se determinan aplicando la transformación de coordenadas afin bidimensional (11).

Punto	$x_D(pix.)$	y_D (pix.)	$x_F(mm)$	$y_F(mm)$
100	412.751	7398.490	-104.291	-90.683
101	3784.168	7998.953	-9.949	-107.745
102	6524.136	785.448	67.306	93.980
103	5101.783	4997.219	27.167	23.815
104	1236.654	2812.721	-80.878	37.627

D. Coordenadas transformadas de los cinco puntos anteriores.

A partir de las expresiones vistas en (10), las coordenadas transformadas de los cinco puntos son:

Punto	$x_T(mm)$	$y_T(mm)$
100	-104.288	-90.684
101	-9.946	-107.746
102	67.309	93.979
103	27.170	-23.816
104	-80.875	37.626

E. Coordenadas imagen de los cinco puntos anteriores.

Las coordenadas imagen las obtendremos tras corregir los efectos de distorsión del objetivo de la cámara métrica, de refracción atmosférica y de esfericidad terrestre.

La expresión general que se aplicará para pasar de coordenadas transformadas a imagen será:

$$x_{I} = x_{T} \left(1 + \frac{-C_{d} - C_{r} + C_{e}}{r} \right) = x_{T} \left(1 + \frac{C_{T}}{r} \right)$$

$$y_{I} = y_{T} \left(1 + \frac{-C_{d} - C_{r} + C_{e}}{r} \right) = y_{T} \left(1 + \frac{C_{T}}{r} \right)$$

$$(12)$$

siendo:

- (x_T, y_T) , coordenadas transformadas.
- r, distancia radial (desde el punto principal).
- C_d , corrección de distorsión radial de la lente.
- C_r , corrección de refracción atmosférica.
- C_e , corrección de esfericidad terrestre.
- C_T , corrección total.

El cálculo de la **distorsión radial de la lente**, C_d , equivale al de Δr según el enunciado, por tanto habrá que aplicar a cada uno de los puntos la expresión:

$$\Delta r = k_1 r + k_2 r^3 + k_3 r^5 + k_4 r^7$$

siendo:

 $-k_1 = 1.94972*10^{-4}$

 $-k_2 = 1.92801*10^{-7}$

 $-k_3 = -1.81860*10^{-11}$

 $-k_4 = 3.19350*10^{-16}$

Los resultados alcanzados aparecen reflejados en la tabla 2, columna 3.

El cálculo de la **corrección de refracción**, C_r , se obtiene a partir de la aplicación de las siguientes fórmulas⁴:

$$K = \left[\left(\frac{2410 \cdot H}{H^2 - 6 \cdot H + 250} \right) - \left(\frac{2410 \cdot h}{h^2 - 6 \cdot h + 250} \right) \frac{h}{H} \right] \cdot 1^{-6}$$

$$C_r = K \cdot \left(r + \frac{r^3}{f^2}\right)$$

siendo:

- K, constante que representa el desplazamiento atribuible a un rayo que presenta una abertura de 50^g con respecto a la vertical (en μ).
- H, altitud de vuelo (en km).
- h, altitud de un punto o altitud media del terreno si la cota del punto se desconoce (en km).
- f, distancia focal (en mm).
- r, distancia radial (en mm).

⁴ ImageStation Image Rectifier. Rectify Commands 8-5.

La corrección de refracción atmosférica alcanzada en cada uno de los puntos aparece en la tabla 2, columna 4. Ahora bien, como en el proceso de orientación interna no se conocen las coordenadas terreno de los puntos a medir (excepto las coordenadas de los puntos de apoyo o de paso), la corrección de refracción atmosférica se suele realizar inicialmente con la altitud media del terreno.

Punto	r (mm)	$C_d(mm)$	$C_r(mm)$	$C_e(mm)$	$C_T(mm)$
100	138.201	-0.073	0.009	0.027	0.092
101	108.204	0.051	0.006	0.013	-0.044
102	115.596	0.033	0.006	0.016	-0.024
103	36.130	0.015	0.001	0.000	-0.016
104	89.199	0.066	0.004	0.007	-0.063

Tabla 2. Distancia radial, r, corrección de distorsión, C_d , corrección de refracción, C_r , corrección de esfericidad, C_e , y corrección total, C_T , de los puntos 100-104

El cálculo de la **corrección de esfericidad terrestre**, C_e , se obtiene a partir de la expresión:

$$C_e = \frac{r^3 \cdot H'}{2 \cdot R \cdot f^2}$$

La expresión anterior supone que la fotografía es vertical y que se desprecia la altura del punto frente a la altura de vuelo (H'). El resultado alcanzado se encuentra en la tabla 2, columna 5.

El último campo de la tabla 2 muestra la corrección total, C_T , proveniente de la suma de las tres correcciones con el correspondiente signo:

$$C_T = -C_d - C_r + C_e$$

Finalmente, las coordenadas imagen pedidas de los cinco puntos se hallan a partir de (12), obteniéndose:

Punto	$x_{I}(mm)$	$y_{I}\left(mm\right)$
100	-104.357	-90.744
101	-9.942	-107.702
102	67.295	93.959
103	27.158	-23.806
104	-80.818	37.599

TEMA 5 TOMA FOTOGRAMÉTRICA TERRESTRE



EJERCICIO 37.

Se ha realizado un par fotogramétrico terrestre en el caso de toma normal con los siguientes valores:

- Focal de la cámara: 119.97 mm.
- Base estereoscópica: 4 m.

Las coordenadas transformadas del punto A y B son:

Fotograma izquierdo

Fotograma derecho

$$x_a = 25.328 \text{ mm}$$
 $y_a = 36.249 \text{ mm}$ $x'_a = -21.834 \text{ mm}$ $y'_a = 36.249 \text{ mm}$ $x_b = 37.929 \text{ mm}$ $y_b = 25.468 \text{ mm}$ $x'_b = 3.287 \text{ mm}$ $y'_b = 25.468 \text{ mm}$

Calcular:

- A. Las coordenadas terreno del punto A y B, sabiendo que el origen de coordenadas coincide con el centro de proyección de la cámara izquierda, y el eje X mantiene la dirección y sentido de la base.
- B. El ángulo que forma la alineación AB con el eje de abscisas.
- C. Definir teóricamente la relación entre los sistemas de coordenadas X,Y y X',Y' (Fig. 22).

Solución:

A. Coordenadas terreno del punto A y B, sabiendo que el origen de coordenadas coincide con el centro de proyección de la cámara izquierda, y el eje X mantiene la dirección y sentido de la base.

Las coordenadas terreno a partir de una toma fotogramétrica terrestre (caso normal, Fig. 21) se determinan a partir de:

$$Y_I = \frac{B}{p_i} f; \qquad X_I = \frac{x_i}{f} Y_I; \qquad Z_I = \frac{y_i}{f} Y_I$$
 (13)

siendo:

- B, Base estereoscópica (terreno).
- f, Distancia focal.
- p_i , Paralaje estereoscópico.
- $x_b y_i$, Coordenadas imagen, transformadas o fiduciales según el grado de precisión que se requiera.

El sistema de coordenadas terreno (X, Y, Z) es un sistema de coordenadas que encaja el triedro trirrectángulo en el centro de proyección de la cámara izquierda (L): el eje Y coincide con el eje óptico de la toma, el eje X coincide con la dirección de la base y el eje Z apunta hacia el cenit. Por tanto, las coordenadas terreno que se obtengan están referidas a un sistema de coordenadas terreno relativo centrado en L.

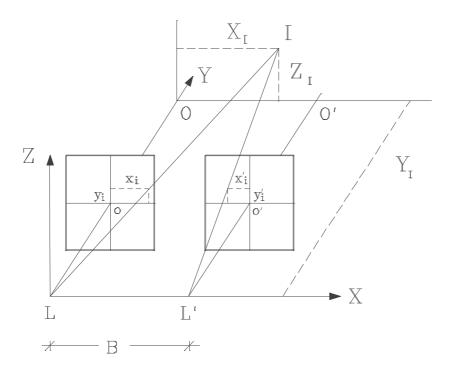


Fig. 21. Disposición de una toma fotogramétrica terrestre en el caso normal

Para calcular la coordenadas terreno de los puntos *A* y *B* debemos calcular primero el paralaje estereoscópico de ambos puntos:

$$p_a = x_a - x'_a = 47.162 \ mm$$

 $p_b = x_b - x'_b = 34.642 \ mm$

y posteriormente aplicar (13), de modo que las coordenadas terreno son:

$$Y_A = \frac{B}{p_a} f = 10.175 \, m.$$
 $X_A = \frac{x_a}{f} Y_A = 2.148 \, m.$ $Z_A = \frac{y_a}{f} Y_A = 3.074 \, m.$

$$Y_B = \frac{B}{p_b} f = 13.853 \, m.$$
 $X_B = \frac{x_b}{f} Y_B = 4.380 \, m.$ $Z_B = \frac{y_b}{f} Y_B = 2.941 \, m.$

B. Ángulo que forma la alineación AB con el eje de abscisas.

Una vez hemos determinado las coordenadas terreno de la alineación AB, el ángulo que forma la alineación AB con el eje de abscisas se calcula a partir de la expresión conocida:

$$\alpha_{A,B} = \arctan\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) = 65^g.2761$$

C. Definir teóricamente la relación entre los sistemas de coordenadas X,Y y X',Y'.

El sistema de coordenadas X', Y' presenta el origen de coordenadas en el punto A, con dirección y sentido del eje X la alineación AB (Fig. 22).

La relación entre ambos sistemas de coordenadas viene definida por una transformación matemática que contendrá 2 traslaciones Tx, Ty, y una rotación α . Además, en la Fig. 22 se presenta un sistema de coordenadas auxiliar X'', Y'' paralelo a X, Y, que se utilizará para pasar de X', Y' a X, Y y viceversa.

Si se quiere pasar del sistema X'', Y'' al X', Y' (giro a la izquierda) se utilizarán las expresiones:

$$X' = X'' \cos \alpha + Y'' \sin \alpha$$

 $Y' = -X'' \sin \alpha + Y'' \cos \alpha$ (14)

mientras que si se quiere pasar del sistema X',Y' al X'',Y'' (giro a la derecha):

$$X'' = X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha$$

$$Y'' = X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha$$
(15)

La relación entre el sistema X, Y y X'', Y'' es obviamente una traslación del tipo:

$$X = Tx + X''$$
$$Y = Ty + Y''$$

Consecuentemente, podemos pasar con facilidad de un sistema de coordenadas a otro, utilizando en cada toma fotogramétrica el sistema de coordenadas que más nos convenga.

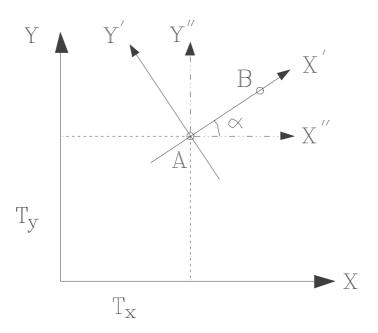


Fig. 22. Sistemas de coordenadas X, Y, X', Y'y X'', Y'', relacionados a partir de una rotación α , una traslación Tx en el eje Xy una traslación Ty en el eje Y

EJERCICIO 38.

Se ha realizado una toma fotogramétrica, con una cámara semimétrica que tiene las siguientes características:

- Focal: 41.91 mm.
- Formato: 35 x 24 mm.

Además, la toma es convergente: giro de la cámara izquierda 10^g a la derecha, la base estereoscópica es de 4 m y el centro de proyección de la cámara derecha está 40 cm más elevado que el de la cámara izquierda.

Las coordenadas transformadas del punto P son:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho
$$x_p = 4.541 \text{ mm } y_p = -2.190 \text{ mm}$$
 $x'_p = 1.639 \text{ mm } y'_p = -3.143 \text{ mm}$

Calcular las coordenadas terreno del punto P aplicando las expresiones de toma convergente.

Solución:

La resolución de este problema va a consistir en deshacer la toma convergente para pasar (artificialmente) a una toma normal (Fig. 23). Se trata pues de eliminar la rotación V producida en el eje de toma izquierdo, de modo que se establezca un paralelismo entre los ejes ópticos de la toma izquierda y derecha.

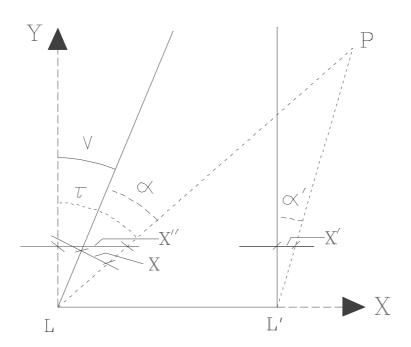


Fig. 23. Toma convergente y normal superpuestas. Datos necesarios para el paso de la coordenada x (toma convergente) a x'' (toma normal)

Tal y como se desprende de la Fig. 23, tenemos que:

$$V = \tau - \alpha \rightarrow \qquad \tau = \alpha + V$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{x''}{f} \implies x'' = f \cdot \operatorname{tg} \tau = f \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{f} + V \right)$$

luego para el punto P, sustituyendo valores:

$$x''_p = 11.374 \ mm$$

Por lo tanto, ahora podemos considerar la coordenada $x''_p \equiv x_p$ en el caso de toma normal, y trabajar bajo este supuesto por medio de (13).

Así pues, siguiendo el procedimiento visto en el ejercicio anterior, el paralaje del punto *P* es:

$$p_p = x''_p - x'_p = 9.735 \ mm$$

y las coordenadas terreno del punto P:

$$X_p = \frac{B}{p_p} x''_p = 4.673 \, m.$$

$$Y_p = \frac{B}{p_p} f = 17.220 \, m.$$

$$Z_{p} = \frac{B}{p_{p}} y_{p} = -0.900 \, \mathbf{m}. \text{ (desde el CDP izquierda, } L)$$

$$Z_{p} = \frac{B}{p_{p}} y'_{p} + dz_{L,L'} = -1.291 + 0.40 = -0.891 \, \mathbf{m}. \text{ (desde el CDP derecha, } L')$$

de donde tomando la media de la coordenada Z, se obtiene que:

$$Z_P = -0.896 m$$

EJERCICIO 39.

Se ha realizado una toma fotogramétrica que tiene las siguientes características:

- Cámara semimétrica de distancia focal: 41.91 mm.
- Formato: 35 x 24 mm.

- Toma convergente: giro de la cámara izquierda 10^g a la derecha,
- Base estereoscópica: 4 m.
- Desnivel centro de proyección derecha-izquierda, $dZ_{L,L'} = 40$ cm.

Las coordenadas transformadas del punto P son:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho
$$x_p = 4.541 \text{ mm } y_p = -2.190 \text{ mm}$$
 $x'_p = 1.639 \text{ mm } y'_p = -3.143 \text{ mm}$

Calcular las coordenadas terreno del punto P por intersección a partir de fotos horizontales.

Solución:

La resolución de problemas fotogramétricos se puede abordar por muy diversos métodos, prueba de ello es el presente ejercicio; los datos del enunciado son los mismos que en el ejercicio anterior. Sin embargo, el método seguido para el cálculo de las coordenadas terreno es similar al visto en topografía clásica (intersección directa simple).

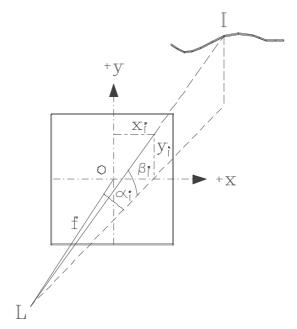


Fig. 24. Simbología matemática empleada en una toma horizontal

Recordando conceptos básicos, los ángulos horizontales y verticales a partir de fotografías cuyo eje de toma es horizontal (Fig. 24), se pueden obtener utilizando las siguientes expresiones:

$$\alpha_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_i}{f}\right)$$

$$\beta_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + f^2}}\right)$$

El problema se resuelve planteando una intersección directa simple a partir de los ángulos obtenidos en el par estereoscópico. La situación planimétrica que se presenta es la que aparece en la Fig 25.

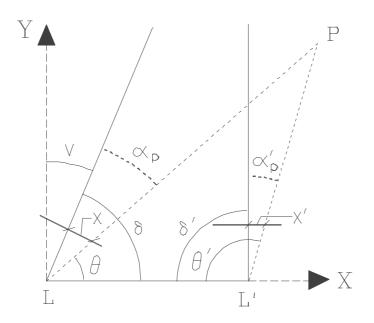


Fig. 25. Disposición y simbología utilizada en la toma convergente

Los valores de los ángulos que aparecen en el gráfico anterior son los que figuran a continuación:

$$\alpha_p = \arctan(x_p / f) = 6^g.8711$$

 $\alpha'_p = \arctan(x'_p / f) = 2^g.4884$

$$\theta = \delta - \alpha_p = 83^{g}.1290$$

 $\theta' = \delta' + \alpha'_p = 102^{g}.4884$
 $\theta'' = 200 - \theta - \theta' = 14^{g}.3826$

Aplicando el teorema del seno al triángulo LPL' se llega a que:

$$LP = B \operatorname{sen} \phi' / \operatorname{sen} \phi'' = 17.843 \ m$$

 $L'P = B \operatorname{sen} \phi / \operatorname{sen} \phi'' = 17.233 \ m$

y las coordenadas planimétricas del punto P:

$$X_P = LP \cos \phi = B - L'P \cos \phi' = 4.673 m$$

 $Y_P = LP \sin \phi = L'P \sin \phi' = 17.220 m$

Con respecto a la coordenada altimétrica del punto P:

tg
$$\beta_p = -3^g.2078$$

tg $\beta'_p = -4^g.7617$
 $Z_L = 0.0 m$
 $Z_{L'} = 0.4 m$

$$Z_{L} = 0.4 m$$

se adopta como coordenada Z la media de ambas coordenadas:

$$Z_P = -0.896 m$$

EJERCICIO 40.

Un punto P es fotografiado desde 2 posiciones distintas, siendo las tomas horizontales, paralelas y oblicuas a la base. La distancia focal de la cámara métrica es de 120 mm, la separación entre tomas es de 75 m, y el ángulo que forma la base con el eje principal, $9 = 145^{g}$.

Las coordenadas transformadas del punto P y las absolutas del centro de provección de la cámara izquierda son:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho
$$x_p = 35.14 \text{ mm}$$
 $x'_p = 15.72 \text{ mm}$ $y_p = 2.18 \text{ mm}$ -----

$$X_L = 385.31 \text{ m}; \quad Y_L = 4350.91 \text{ m}; \quad Z_L = 33.15 \text{ m}$$

El acimut topográfico del eje principal de la cámara derecha es de 33g.15.

Calcular:

- A. Las coordenadas terreno relativas del punto P.
- B. Las coordenadas terreno absolutas del punto P.

Solución:

A. Coordenadas terreno relativas del punto P.

La aplicación de las fórmulas de fotogrametría terrestre en el caso de toma desviada, posibilita hallar las coordenadas terreno de los puntos en un sistema cuyo eje de coordenadas Y' es coincidente con el eje óptico de la cámara izquierda⁵ (Fig. 26). Así pues, con los datos del ejercicio llegamos a que las coordenadas terreno en el sistema de coordenadas relativo (particular) X' Y' Z' son:

$$p_p = x_p - x'_p = 19.42 \ mm$$

$$Y' = \frac{B}{p_p} (f \cos \varphi \pm x' \sin \varphi) \xrightarrow{6} Y' = \frac{B}{p_p} (f \cos \varphi + x' \sin \varphi) = 391.831 \, m.$$

$$X'_{p} = \frac{x_{p}}{f} Y'_{p} = 114.741 m.$$

$$Z'_{P} = \frac{y_{p}}{f}Y'_{P} = 7.118 m.$$

-

⁵ Nótese que en este ejercicio los ejes de toma fotogramétrica no coinciden con los ejes cartesianos del sistema de coordenadas (caso usual en fotogrametría terrestre).

⁶ Se toma el signo + porque $\theta > 100^g$, siendo θ el ángulo formato por el eje óptico de la toma izquierda (L) y la base B. [En el presente ejercicio: $\theta = \varphi + 100^g$].

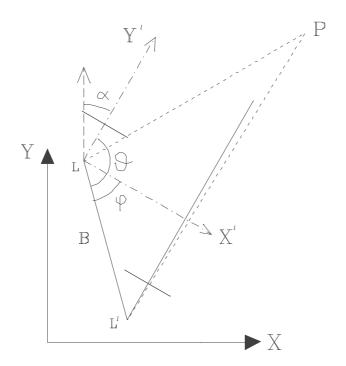


Fig. 26. Gráfico de toma desviada en el que aparecen reflejados los sistemas de coordenadas terreno relativo (X', Y') y absoluto (X, Y)

B. Coordenadas terreno absolutas del punto P.

Para referir las coordenadas terreno relativas (referidas a L) al sistema de coordenadas terreno absoluto XYZ (Fig. 26), hay que realizar una traslación ($Tx = X_L$, $Ty = Y_L$, $Tz = Z_L$) y una rotación ($\alpha = 33.15^g$, correspondiente al acimut topográfico del eje principal), de modo que las coordenadas de P son:

$$X_p = X'_p \cos \alpha + Y'_p \sin \alpha + X_L = 679.781 m$$

 $Y_p = -X'_p \sin \alpha + Y'_p \cos \alpha + Y_L = 4633.724 m$
 $Z_p = Z'_p + Z_L = 40.268 m$

EJERCICIO 41.

Se ha realizado una toma fotogramétrica con recubrimiento estereoscópico de cuya exploración se han obtenido los siguientes datos:

- La cámara utilizada es una cámara métrica de distancia focal 119.94 mm y de formato 9 cm x 12 cm.
- Toma desviada: 19^g (a la derecha)
- Base estereoscópica: 83.125 m.
- Altura de la cámara: 1.5 m.
- Desnivel en los extremos de la base, $dZ_{L,L}$ = -5.15 m.

Las coordenadas cliché (en mm) de las 4 marcas fiduciales y del punto P son:

Fotograma izquierdo			Fotograma derecho		
	x_K	y_K	x_{K}	y_K	
1	<i>-37.573</i>	63.344	-50.390	56.997	
2	-38.654	-32.644	-50.656	-39.008	
3	-76.108	15.779	-88.523	9.096	
4	-0.116	14.914	-12.524	8.886	
p	-39.000	21.270	-64.608	15.764	

Las coordenadas fiduciales calibradas de las marcas fiduciales son:

	x_F	y_F
1	0.000	48.000
2	0.000	-48.000
3	-38.000	0.000
4	38,000	0.000

y las coordenadas terreno del centro de proyección L:

$$X_L = 327.28 \text{ m}; \quad Y_L = 933.43 \text{ m}; \quad Z_L = 27.27 \text{ m}$$

Se pide:

- A. Calcular la transformación que liga las coordenadas cliché con las coordenadas fiduciales.
- B. Obtener los parámetros de las matrices de afinidad.

- C. Calcular las coordenadas transformadas del punto P en ambos sistemas sabiendo que el punto principal de la cámara coincide con el centro fiducial
- D. Calcular las coordenadas terreno del punto P.

Solución:

A,B,C. Fotograma izquierdo.

Tal y como se vio en el ejercicio 35, aplicando (9) obtendremos los seis parámetros de la transformación afín bidimensional que permiten relacionar el sistema de coordenadas cliché con el sistema de coordenadas fiduciales.

El sistema que aquí resulta tiene una dimensión:

$$K_{(8,1)} + r_{(8,1)} = A_{(8,6)} x_{(6,1)}$$

siendo:

MATRIZ A

$$\begin{pmatrix} 1 & -37.573 & 63.344 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -37.573 & 63.344 \\ 1 & -38.654 & -32.644 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -38.654 & -32.644 \\ 1 & -76.108 & 15.779 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -76.108 & 15.779 \\ 1 & -0.116 & 14.914 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.116 & 14.914 \\ \end{pmatrix}$$

MATRIZ K

MATRIZ $(A^T \cdot A)$

4.000	-152.451	61.393	0.000	0.000	0.000
-152.451	8698.303	-2320.841	0.000	0.000	0.000
61.393	-2320.841	5549.497	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	4.000	-152.451	61.393
0.000	0.000	0.000	-152.451	8698.303	- 2320.841
0.000	0.000	0.000	61.393	-2320.841	5549.497

MATRIZ $(A^T \cdot A)^{-1}$

1	0.805793007534267	0.013219337249081	$-\ 0.003385904698864$	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	١
1	0.013219337249081	0.000346272637326	$-\ 0.000001429139533$	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	
	- 0.003385904698864	- 0.000001429139533	0.000217056424096	0.000000000000000	0.000000000000000	0.0000000000000000	
İ	0.0000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.805793007534267	0.013219337249081	- 0.003385904698864	ĺ
	0.000000000000000	0.0000000000000000	0.000000000000000	0.013219337249081	0.000346272637326	- 0.000001429139533	
1	0.0000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	- 0.003385904698864	- 0.000001429139533	0.000217056424096	

MATRIZ $A^T \cdot K$

Resultados de la compensación:

- Estimador var. a priori obs. peso unidad = 1
- Estimador var. a posteriori obs. peso unidad = 0.000007250

Valores de los parámetros y desviaciones típicas:

Parámetro, Tx = 38.28472198427 mm; E.M.C. = 0.002417 mmParámetro, a = 0.99997708553 E.M.C. = 0.000050 Parámetro, b = -0.01126156517 E.M.C. = 0.000040

Parámetro, $Ty = -14.91437360008 \, mm$; E.M.C. = 0.002417 mm

Parámetro, c = 0.01138274282 E.M.C. = 0.000050

Parámetro, d = 0.99999682254 E.M.C. = 0.000040

Residuos del ajuste (mm):

R(1) = -0.000770

R(2) = 0.001741

R(3) = -0.000770

R(4) = 0.001742

R(5) = 0.000770

R(6) = -0.001742

R(7) = 0.000770

R(8) = -0.001741

Parámetros de la matriz de afinidad:

Factor de escala *X*, Sx = 1.0000418683

Factor de escala *Y*, Sy = 1.0000602322

Giro, $\theta = 0^{g}.7246$

Ángulo de falta de perpendicularidad, $\delta = 0^{g}.0077$

Coordenadas transformadas del punto P:

$$x_p \equiv X_{Fp} = Tx + a X_{Kp} + b Y_{Kp} = -0.954 mm$$

$$y_p \equiv Y_{Fp} = Ty + c X_{Kp} + d X_{Kp} = 5.912 mm$$

A,B,C. Fotograma derecho.

Sistema de ecuaciones:

$$K_{(8,1)} + r_{(8,1)} = A_{(8,6)} x_{(6,1)}$$

siendo:

$\mathbf{MATRIZ}\,A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -50.390 & 56.997 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -50.390 & 56.997 \\ 1 & -50.656 & -39.008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -50.656 & -39.008 \\ 1 & -88.523 & 9.096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -88.523 & 9.096 \\ 1 & -12.524 & 8.886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12.524 & 8.886 \\ \end{pmatrix}$$

MATRIZ K

MATRIZ $(A^T \cdot A)$

	4.000	-202.093	35.971	0.000	0.000	0.000
-	- 202.093	13098.355	-1812.583	0.000	0.000	0.000
	35.971	-1812.583	4931.980	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.000	0.000	4.000	-202.093	35.971
	0.000	0.000	0.000	-202.093	13098.355	-1812.583
	0.000	0.000	0.000	35.971	-1812.583	4931.980

MATRIZ $(A^T \cdot A)^{-1}$

MATRIZ $A^T \cdot K$

$$\begin{pmatrix}
0.000 \\
2887.962 \\
-7.980 \\
0.000 \\
12.768 \\
4608.240
\end{pmatrix}$$

Resultados de la compensacion:

- Estimador var. a priori obs. peso unidad = 1
- Estimador var. a posteriori obs. peso unidad = 0.000006249

Valores de los parámetros y desviaciones típicas:

Parámetro, $Tx = 50.54844423257 \ mm$;	$E.M.C. = 0.002683 \ mm$
Parámetro, $a = 1.00000550199$	E.M.C. = 0.000047
Parámetro, $b = -0.00277070464$	E.M.C. = 0.000037
Parámetro, $Ty = -8.85261560002 mm$;	E.M.C. = $0.002683 \ mm$
Parámetro, $c = 0.00276302859$	E.M.C. = 0.000047
Parámetro. $d = 0.99994026123$	E.M.C. = 0.000037

Residuos del ajuste (mm):

R(1) = 0.000245	R(2) = 0.001750
R(3) = 0.000245	R(4) = 0.001751
R(5) = -0.000245	R(6) = -0.001751
R(7) = -0.000245	R(8) = -0.001751

Parámetros de la matriz de afinidad:

Factor de escala *X*, Sx = 1.0000093191

Factor de escala Y, Sy = 0.9999440999

Giro, $\theta = 0^{g}.1759$

Ángulo de falta de perpendicularidad, $\delta = -0^{\rm g}.0005$

Coordenadas transformadas del punto P:

$$X'_{p} \equiv X_{Fp} = Tx + a X_{Kp} + b Y_{Kp} = -14.104 mm$$

$$y'_{p} \equiv Y_{Fp} = Ty + c X_{Kp} + d X_{Kp} = 6.732 mm$$

D. Calcular las coordenadas terreno del punto P.

El cálculo de las coordenadas terreno del punto P no reviste dificultad utilizando las expresiones conocidas de toma desviada. Cabe resaltar que las coordenadas a obtener estarán en el sistema relativo definido por el eje de toma izquierdo y centro L, es decir, el sistema de coordenadas XY (Fig. 27).

Por el contrario, la base estereoscópica *B* está emplazada en el sistema de coordenadas *X'Y'*, por tanto, si queremos referir las coordenadas a la base, habrá que realizar a posteriori un giro de las coordenadas correspondiente al valor de la desviación de la toma. Además, al no coincidir el origen de coordenadas terreno de referencia con *L*, habrá que añadir a las coordenadas terreno relativas la traslación correspondiente.

Así pues, utilizando las expresiones de toma desviada tenemos que:

$$\varphi = 19^{g}$$

$$p_{p} = x_{p} - x'_{p} = 13.150 \text{ mm}$$

$$Y_p = \frac{B}{p_p} (f \cos \varphi \pm x' \sin \varphi) \xrightarrow{7} Y_p = \frac{B}{p_p} (f \cos \varphi - x' \sin \varphi) = 750.875 m.$$

,

⁷ Se toma el signo – porque $\mathcal{G} < 100^{\rm g}$, siendo \mathcal{G} el ángulo formato por el eje óptico de la toma izquierda (*L*) y la base *B*. Además, esta condición también se cumple cuando la toma fotogramétrica es desviada a la derecha (como en el presente ejercicio).

$$X_p = \frac{x_p}{f} Y_p = -5.972 \, m.$$

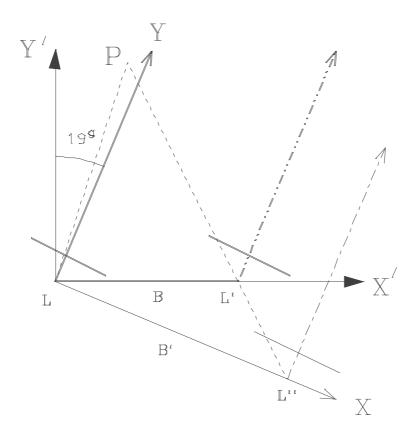


Fig. 27. Toma desviada 19^g a la derecha a partir de la base estereoscópica B

$$Z_{P} = \frac{y_{p}}{f} Y_{P} = 37.012 \, m. \text{ (desde } L)$$

$$Z_{P} = \frac{y'_{p}}{f} Y_{P} = 42.145 \, m. -5.15 \, m. = 36.995 \, m. \text{ (desde } L')$$

adoptando como coordenada Z la media de ambas coordenadas:

$$Z_P = 37.004 \ m$$

Las coordenadas terreno absolutas (sistema de coordenadas terreno de referencia y orientación la de la base, *B*) del punto *P*, se obtienen directamente utilizando las expresiones:

$$X'_p = X_p \cos \alpha + Y_p \sin \alpha + X_L = X_p \cos 19^g + Y_p \sin 19^g + 327.28 = 542.360 m$$

 $Y'_p = -X_p \sin \alpha + Y_p \cos \alpha + Y_L = -X_p \sin 19^g + Y_p \cos 19^g + 933.43 = 1652.867 m$
 $Z'_p = Z_p + Z_L + h_L = 37.004 + 27.27 + 1.5 = 65.774 m$

EJERCICIO 42.

Se dispone de un par estereoscópico de fotografías terrestres inclinadas 7º hacia arriba (con respecto a la horizontal). La distancia focal es de 164.96 mm.

Los ángulos horizontales de los ejes principales —toma izquierda y derechacon respecto a la base son 92^g y 85^g respectivamente. La distancia reducida de la base es de 28 m y las cotas de los centros de proyección son:

$$Z_{I} = 31.983 \text{ m}$$
 $Z_{I'} = 31.568 \text{ m}$

Calcular las coordenadas terreno de un punto A sabiendo que las coordenadas transformadas corregidas de distorsión de la lente son:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho
$$x_a = -1.61 \text{ mm}; \quad y_a = 26.17 \text{ mm} \quad x'_a = -63.57 \text{ mm}; \quad y'_a = 23.24 \text{ mm}$$

Se considera como origen de coordenadas, L, coincidiendo el eje X con la dirección de la base.

Solución:

La resolución de este ejercicio se aborda por medio de una intersección directa. La peculiaridad del mismo es que, al ser una toma inclinada (además de convergente), los ángulos horizontales y verticales se calculan con las expresiones generales (no simplificadas como en el caso de toma horizontal) tanto para la toma izquierda como para la toma derecha.

Con los datos del enunciado, la posición espacial de la cámara es la que aparece en la Fig. 28 y los ángulos horizontales y verticales se obtienen por medio de las siguientes expresiones (*Wolf, P.R.*, 1983⁸):

-

⁸ Capítulo 18. Apartado 9.

$$\boldsymbol{\alpha}_{a} = arctg \left(\frac{\boldsymbol{x}_{a}}{\frac{\boldsymbol{f}}{\cos \theta} - \boldsymbol{y'}_{a} \operatorname{sen} \theta} \right) \quad \boldsymbol{\beta}_{a} = arctg \left(\frac{\boldsymbol{y'}_{a} \cos \theta}{\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\cos \theta} - \boldsymbol{y'}_{a} \operatorname{sen} \theta \right) \operatorname{sec} \boldsymbol{\alpha}_{a}} \right)$$
(16)

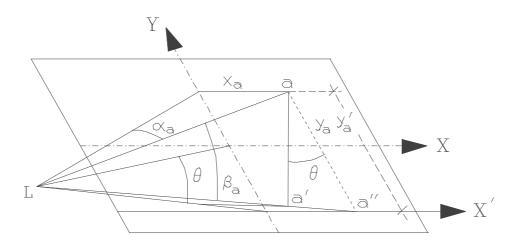


Fig. 28. Definición de coordenadas y ángulos en una toma inclinada hacia arriba (+θ)

Obsérvese que la definición de los ángulos horizontales y verticales (reales en el caso de toma inclinada, Fig. 28) implica trasladar el origen de ordenadas hasta x' (materializado por la intersección del plano horizontal que pasa por el centro de proyección y el fotograma).

A partir de los datos del enunciado sabemos que (Fig. 29):

$$\delta = 92^g$$
 $\delta' = 85^g$ $\theta = 7^g$

El primer paso consiste en obtener los ángulos horizontales y verticales del punto A utilizando (16):

Cámara izquierda, L	Cámara derecha, L'
$y'_a = y_a + f \operatorname{tg} \theta = 44.382 \ mm$	$y'_a = y'_a + f \operatorname{tg} \theta = 41.452 mm$
$\alpha_a = -0^{\mathrm{g}}.6362$	$\alpha'_{a} = -23^{g}.8846$
$\beta_a = 17^{\text{g}}.0153$	$\beta'_a = 14^g.8446$

El segundo paso es calcular por el método de intersección directa las coordenadas terreno del punto A.

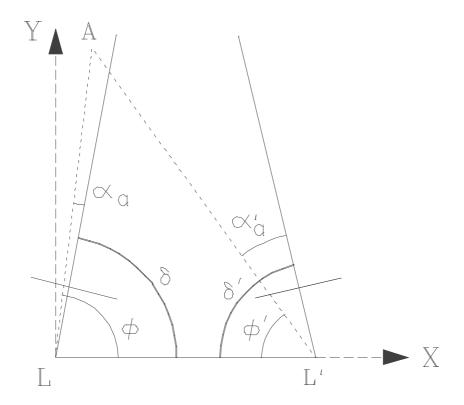


Fig. 29. Disposición en planta de una toma convergente definida por δ, δ' y la base LL'

En el triángulo formado por LAL' (Fig. 29) tenemos que:

$$\phi = \delta - \alpha_a = 92^g.6362$$

 $\phi' = \delta' + \alpha'_a = 61^g.1154$
 $\phi'' = 200^g - \phi - \phi' = 46^g.2484$

Aplicando el teorema del seno al triángulo LAL' se llega a que:

LA = B sen
$$\phi$$
' / sen ϕ '' = 34.532 m
L'A = B sen ϕ / sen ϕ '' = 41.872 m

y las coordenadas planimétricas del punto A:

$$X_A = \text{LA cos } \phi = B - \text{L'A cos } \phi' = 3.985 \text{ m}$$

 $Y_A = \text{LA sen } \phi = \text{L'A sen } \phi' = 34.301 \text{ m}$

La coordenada Z del punto A:

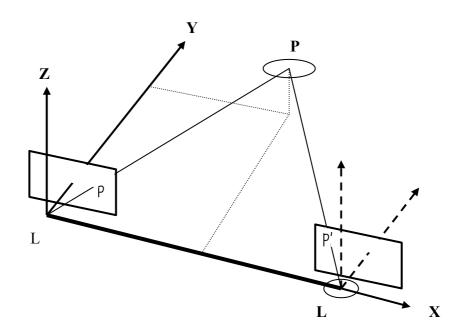
$$Z_L = 31.983 m$$
 $Z_{L'} = 31.568 m$
 $Z_A = Z_L + \text{LA } tg \beta_p = 41.439 m \text{ (desde L)}$
 $Z_A = Z_{L'} + \text{L'A } tg \beta'_p = 41.513 m \text{ (desde L')}$

de donde tomando la media de la coordenada Z, se obtiene la coordenada altimétrica:

$$Z_{\rm A} = 41.476 \ m$$

TEMA 6

PREVISIÓN DE ERRORES EN FOTOGRAMETRÍA TERRESTRE



EJERCICIO 43.

Se ha realizado una toma fotogramétrica terrestre normal con una cámara métrica de distancia focal 120 mm. La distancia entre tomas es de 25 m y el error en la determinación de paralaje es de 5 μ .

Calcular el error planimétrico y altimétrico previsible en la determinación de las coordenadas del punto A:

$$X_A = 20 \text{ m}; \qquad Y_A = 82 \text{ m}; \qquad Z_A = 17 \text{ m}$$

respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de proyección de la cámara izquierda y la dirección del eje de abscisas la definida por la base.

Solución:

Las fórmulas que permiten calcular el error previsible en la determinación de las coordenadas de un punto (*Chueca Pazos, M.,* 1982⁹) hacen una serie de suposiciones y, en general, consideran que el error en la distancia focal y en la medición de la base es despreciable. En dicho caso, la precisión previsible en la medición de un punto es:

$$dY = -\frac{Y^2}{B \cdot f} da; \quad dX = \frac{X}{Y} dY; \quad dZ = \frac{Z}{Y} dY$$
 (17)

Sustituyendo los datos del enunciado en (17) alcanzamos un error previsible para el punto A:

$$dY_A = \pm 11.2 \ mm$$

$$dX_A = \pm 2.7 \ mm$$

$$dZ_A = \pm 2.3 \ mm$$

Por tanto, el error planimétrico previsible es igual a:

$$\varepsilon_p = \sqrt{dX_A^2 + dY_A^2} = 1.2 \ cm$$

mientras que el error altimétrico previsible es directamente dZ_A .

-

⁹ Capítulo XXIV. Apartado 4.

EJERCICIO 44.

Se ha realizado una toma fotogramétrica terrestre normal con una cámara métrica de distancia focal 60 mm. La distancia entre tomas es de 12 m \pm 0.01 m y el error en la determinación de paralaje es de 10 μ .

Calcular el error planimétrico y altimétrico previsible en la determinación de las coordenadas del punto A:

$$X_A = 17 \text{ m};$$
 $Y_A = 72 \text{ m};$ $Z_A = 14 \text{ m}$

respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de proyección de la cámara izquierda y la dirección del eje de abscisas la definida por la base.

Solución:

En este ejercicio se va a comprobar la influencia que tiene en la determinación del error previsible en una toma fotogramétrica la no consideración de un error en la base

Primero calcularemos el error previsible sin considerar el error en la base por medio de (17). Así pues, para el punto *A*:

$$dY_A = -\frac{Y_A^2}{B \cdot f} da = \frac{72^2}{12 \cdot 0.060} 10^{-6} = \pm 0.072 \text{ m}$$

$$dX_A = \frac{X_A}{Y_A} dY = \frac{17}{72} 0.072 = \pm 0.017 \text{ m}$$

$$dZ_A = \frac{Z_A}{Y_A} dY = \frac{14}{72} 0.072 = \pm 0.014 \text{ m}$$

de donde el error planimétrico es:

$$\varepsilon_n = \sqrt{dX_A^2 + dY_A^2} = 0.074 \ m$$

Si ahora se analiza el error previsible teniendo en cuenta el error en la base, llegamos a que:

$$dY_A = \frac{Y_A^2}{B \cdot f} da + \frac{dB}{B} Y_A = \pm 0.132 m$$

$$dX_A = \frac{X_A}{Y_A}dY = \pm 0.031 \, m$$

$$dZ_A = \frac{Z_A}{Y_A}dY = \pm 0.026 \ m$$

y el error planimétrico:

$$\varepsilon_p = \sqrt{dX_A^2 + dY_A^2} = 0.136 \, \boldsymbol{m}$$

A la vista de los resultados, rápidamente se deduce que el error en la base estereoscópica sólo es despreciable si la distancia entre los centros de proyección se mide cuidadosamente y con la mayor precisión posible.

EJERCICIO 45.

Se ha realizado una toma fotogramétrica terrestre con una cámara estereométrica de distancia focal 60 mm, con formato útil de 80 mm x 95 mm y base fija de 400 mm. El error en la determinación de paralaje es de 7μ .

Determinar:

- A. Para una fachada que se encuentra a 8 m de la cámara, ¿cuál es el error máximo previsible en la zona de recubrimiento estereoscópico?
- B. Si la película se hubiera digitalizado con un escáner a 600 d.p.i. ¿qué error máximo previsible se habría cometido utilizando un restituidor digital?

Solución:

A. Para una fachada que se encuentra a 8 m de la cámara, ¿cuál es el error máximo previsible en la zona de recubrimiento estereoscópico?

Las expresiones de error máximo vienen definidas por:

$$dY_{max} = -\frac{Y_{max}^2}{B \cdot f} da$$

$$dX_{max} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) dY_{max} = \left(\frac{\frac{x}{2}}{f}\right) dY_{max}$$

$$dZ_{max} = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) dY_{max} = \left(\frac{\frac{y}{2}}{f}\right) dY_{max}$$
(18)

siendo:

- Y_{max} , Profundidad máxima.
- B, Base estereoscópica.
- f, Distancia focal.
- da, Error en la determinación del paralaje.
- x, Lado útil del fotograma (base).
- y, Lado útil del fotograma (altura).
- ω , Campo horizontal.
- β , Campo vertical.

Por tanto, los errores máximos previsibles que se cometerán en los extremos de la zona de recubrimiento serán:

$$dY_{max} = -\frac{Y_{max}^2}{B \cdot f} da = \frac{8^2}{0.4 \cdot 0.06} 7 \cdot 10^{-6} = \pm 0.019 \ m$$

$$dX_{max} = \left(\frac{x/2}{f}\right) dX_{max} = \left(\frac{80/2}{60}\right) 0.019 = \pm 0.013 \, m$$

$$dZ_{max} = \left(\frac{y/2}{f}\right) dY_{max} = \left(\frac{95/2}{60}\right) 0.019 = \pm 0.015 \ m$$

B. Si la película se hubiera digitalizado con un escáner a 600 d.p.i. ¿qué error máximo previsible se habría cometido utilizando un restituidor digital?

La precisión de medida en un restituidor digital suele ser del orden del tamaño del píxel de la imagen digital. A partir de estudios empíricos, algunos analistas (fotográmetras) consideran que la precisión a alcanzar a posteriori en puntos bien señalizados y con elevada redundancia es 1/10 del tamaño del píxel. Sin embargo, esta precisión puede disminuir hasta 1/2 del tamaño del píxel en trabajos de menor precisión.

En el presente ejercicio, el tamaño del píxel de la imagen digital es:

$$600 \, \textbf{d.p.i.} = \frac{25.4 \, \textbf{mm}}{600} = 42.3333 \, \mu \approx 42 \, \mu$$

Considerando un error máximo en la determinación del paralaje igual a la mitad del tamaño del pixel:

$$da = 21 \mu$$

y volviendo a calcular de nuevo los errores máximos (18) llegamos a que:

$$dY_{max} = 0.056 m$$

$$dX_{max} = 0.037 m$$

$$dZ_{max} = 0.044 m$$

A partir de los resultados obtenidos, puede comprobarse como el tamaño del pixel tiene gran relevancia en la precisión del resultado final. En este caso resulta que los errores aparecen multiplicados por un factor 3x como consecuencia directa de da^{10} .

-

La precisión en los métodos analíticos con soporte digital (imagen digital) sólo se puede considerar igual a la alcanzada por métodos analíticos tradicionales (fotograma analógico), si no se pierde información en el proceso de conversión de formato analógico a digital.

TEMA 7

PROYECTO DE LEVANTAMIENTO FOTOGRAMÉTRICO TERRESTRE



EJERCICIO 46.

Una empresa constructora desea realizar una urbanización en una ladera de acusada pendiente. La superficie abarca un rectángulo de 75 m x 175 m y se requiere un cartografiado a escala 1:500.

Realizar un proyecto de levantamiento fotogramétrico terrestre de la zona de actuación con una cámara métrica que tiene las siguientes características:

- Distancia focal: 200 mm.
- Formato: 13 cm x 18 cm.
- Formato útil: 120 mm x 166 mm.

La restitución se llevará a cabo con un restituidor analítico de primer orden, el tamaño de la marca flotante es de 25 μ , y el error en la determinación de paralaje se estima en 5 μ .

Determinar:

- A. La base estereoscópica recomendada y la profundidad máxima.
- B. Los errores máximos previsibles.
- C. La escala mínima del fotograma.
- D. La superficie abarcada por un modelo estereoscópico.
- E. El ancho máximo y mínimo del modelo.
- F. La dimensión de los puntos de apoyo.
- G. La representación del proyecto de levantamiento.

Solución:

A. Base estereoscópica recomendada y profundidad máxima.

En este tipo de problemas se persigue poder realizar un levantamiento fotogramétrico terrestre que entre en tolerancia a la escala del mapa o plano de representación. Lógicamente, habrá que buscar cual es la situación óptima que permita realizar el mínimo trabajo y que la precisión a obtener sea suficiente.

Como los errores previsibles en las coordenadas X y Z son función e inferiores al error en la coordenada Y, usualmente se estudia el error planimétrico para cifrar la profundidad máxima del levantamiento.

El error máximo planimétrico es:

$$\varepsilon_p = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dY_{max} \sqrt{1 + \lg^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{Y_{max}^2}{B \cdot f} da \sqrt{1 + \lg^2 \frac{\omega}{2}}$$
(19)

y la tolerancia del plano:

$$0.2*10^{-3}*500 = 0.1 m$$

Por tanto, se debe cumplir:

$$\varepsilon_p \le Tolerancia = 0.1 \ m \implies \frac{Y_{max}^2}{B} \le 3831.305$$
 (20)

Con tal de adoptar un valor que nos ofrezca un cierto coeficiente de seguridad (compruébese los valores máximos previsibles que aparecen a continuación), adoptaremos como relaciones a estudiar en el proyecto de toma las que figuran a continuación:

$$\frac{Y_{max}^2}{R} \le 3500 \quad o \quad KY_{max} \le 3500 \tag{21}$$

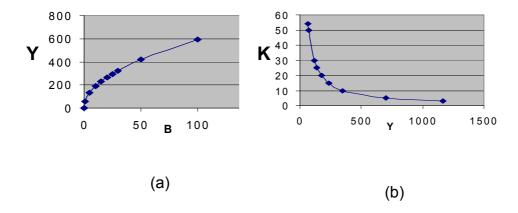


Fig. 30. (a) Representación de la parábola $Y_{max.}^2 = 3500 \, B$ (b) Representación de la hipérbola $K \cdot Y_{max.} = 3500$

A partir de la representación gráfica de ambas inecuaciones (Fig. 30) se observa la necesidad de recurrir a valores de *K* pequeños para que la distancia máxima de la zona de levantamiento cumpla la segunda inecuación. Además, también debemos comprobar que la base estereoscópica que se fije permita restituir las superfícies más alejadas de la toma.

Uno de los valores de *K* que mejor se ajusta a las necesidades y configuración del proyecto de levantamiento, teniendo en cuenta ambas inecuaciones (21), es:

$$K = 10$$

Consecuentemente, los parámetros de profundidad máxima del levantamiento y de base máxima seleccionados son:

$$Y_{max} = 350 \text{ m}$$

 $B_{max} = 35 \text{ m}$

B. Errores máximos previsibles.

Con los valores establecidos en el apartado anterior y utilizando las fórmulas de error en cota máxima (18), se obtiene:

$$dY_{max} = \frac{Y_{max}^{2}}{B \cdot f} da = 0.088 m$$

$$dX_{max} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} dY_{max} = 0.026 m$$

$$dZ_{max} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} dY_{max} = 0.037 m$$

Como bien es sabido, el error altimétrico viene definido directamente por dZ_{max} , mientras que el error planimétrico es:

$$\varepsilon_p = \sqrt{dX_{\text{max}}^2 + dY_{\text{max}}^2} = 0.092 \, m$$

Nótese que este error es inferior a la tolerancia establecida, y nos permite un margen de error en la tolerancia del plano de un 8.7% (que se puede utilizar para suponer un error en la transmisión del apoyo por topografía; una ligera desviación en el caso de toma normal; etc.) ¹¹.

¹¹ A medida que se acerca el ε_p a la tolerancia, el margen de error disminuye, dependiendo éste del valor que se haya fijado en la inecuación (20).

C. Escala mínima del fotograma.

La escala mínima viene definida evidentemente por la distancia máxima a la que se encuentra la zona a restituir:

$$E_{min} = \frac{1}{m_b} = \frac{f}{Y_{max}} = \frac{0.2}{350} = \frac{1}{1750}$$

D. Superficie abarcada por un modelo estereoscópico.

Considerando la zona de levantamiento comprendida entre Y_{max} y Y_{min} =2B, llegamos a que la superfície abarcada por un modelo estereoscópico es igual a:

$$S = (K - 2)B^{2} \left[(K + 2) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - 1 \right] = 25480 \, m^{2}$$

E. Ancho máximo y mínimo del modelo.

El ancho máximo, L, y el ancho mínimo, L', vienen definidos por:

$$L = B \left(2Ktg \frac{\omega}{2} - 1 \right) = 35 \left(2 \cdot 10 \frac{60}{200} - 1 \right) = 175 \, m$$

$$L' = 2Y_1 tg \frac{\omega}{2} = 2.11.67 \frac{60}{200} = 7.002 m$$

siendo:

$$Y_o = \frac{B}{2tg\frac{\omega}{2}} = 58.333 \, m;$$
 $Y_I = 2B - Y_o = Y_{min} - Y_o = 11.67 \, m$

F. Dimensión de los puntos de apoyo.

Para poder colimar con cierto grado de fiabilidad en un restituidor, la dimensión de la señal de referencia artificial utilizada en el punto de apoyo debe ser significativamente mayor que el tamaño de la marca flotante a la escala del fotograma. Como mínimo la señal se escogerá (dependiendo del contraste de la imagen) con un

tamaño doble del necesario para visualizar la marca flotante t en el centro de la señal. También conviene no confundir lo que es el diseño del patrón de la señal (utilizado para localizar fácilmente el punto de apoyo en el fotograma) con la señal en sí misma (que materializa el punto de apoyo).

La marca flotante del restituidor en cuestión tiene un diámetro de 25 μ y la escala mínima del fotograma es 1:1750, por tanto, la dimensión de la señal (s) que se utilice para señalizar los puntos de apoyo deberá ser al menos de:

$$s = 2 \cdot t = 2 (25 \cdot 10^{-6} \cdot 1750) = 0.088 m$$

G. Representación del proyecto de levantamiento.

A partir de los datos calculados en los apartados anteriores ya puede realizarse un primer encaje (de un único modelo estereoscópico) sobre la zona de levantamiento (Fig. 31). Dada la imposibilidad de abarcar toda la zona de actuación con un único modelo estereoscópico¹², vamos a ver cuántos modelos hacen falta para recubrir de manera óptima los 75 m de anchura en la parte delantera.

Para una profundidad $Y_{\text{ini}} = 158 \text{ m}$, la anchura de un modelo es igual a:

$$l = 2 Y_2 \text{ tg} \frac{\omega}{2} = 59.8 \, m$$

siendo:

$$Y_2 = Y_{ini} - Y_o = 158 - 58.333 = 99.667 m$$

Por tanto, el número de pares necesarios es:

$$Pares = \frac{75 \, m}{59.8 \, m} = 1.25 \approx 2$$

Podemos concluir que la toma fotogramétrica de la superficie rectángular de la ladera constará de dos pares estereoscópicos (tres fotogramas) perpendiculares al lado más corto del rectángulo a cartografiar, con una disposición final tal y como aparece reflejada en la Fig. 31.

¹² Se han probado dos posiciones de toma ortogonales al área rectangular. La disposición del eje de toma ortogonal a la base (lado menor del rectángulo) es la que ofrece un número mínimo de pares y además facilita mucho la toma fotogramétrica.

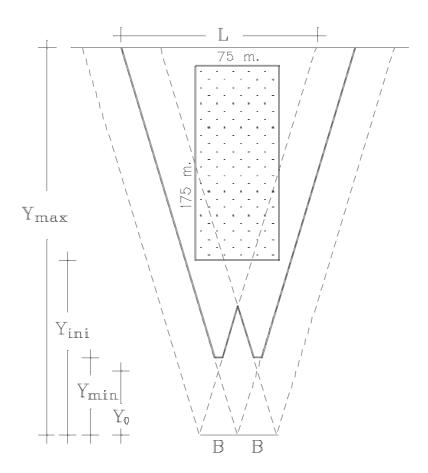


Fig. 31. Representación del recubrimiento estereoscópico sobre el área de levantamiento (zona moteada)

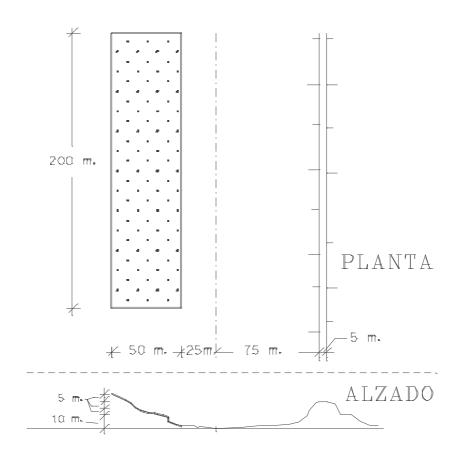
EJERCICIO 47.

Para proyectar la variante de una carretera se desea un levantamiento topográfico de una de las laderas de un barranco a escala 1:500 con curvas de nivel cada 0.5 m. Para ello se dispone de una cámara métrica que tiene las siguientes características:

- Distancia focal 120 mm.
- Campo horizontal 41^g.
- Campo vertical 39^g.

El error en la determinación de paralaje es de 5 μ

Diseñar el proyecto de levantamiento fotogramétrico terrestre –caso normalque permita recubrir el área moteada que aparece en el croquis adjunto.



Solución:

Base estereoscópica recomendada

Según se ha visto en el ejercicio anterior, el error máximo planimétrico (19) debe cumplir:

$$\varepsilon_p = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dY_{max}\sqrt{1 + tg^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{Y_{max}^2}{B \cdot f} da \sqrt{1 + tg^2 \frac{\omega}{2}} \le Tolerancia$$

Como la tolerancia del plano es:

$$0.2*10^{-3} * 500 = 0.10 m$$

sustituyendo datos, llegamos a la siguiente inecuación:

$$\frac{Y_{\text{max}}^2}{B} \le 2276.64 \approx 2250 \, m$$

En este proyecto, además de cumplir la inecuación anterior hay que acomodarse a los condicionantes del terreno (aumentando el grado de dificultad del levantamiento).

Aprovechando que la carretera antigua se encuentra entre un mínimo de 150 m y un máximo de 155 m de la ladera a levantar, y sabiendo que:

$$K Y = 2250$$

si adoptamos una Y = 152 m, tenemos que:

K = 14.803 (máximo valor aplicable) $\Rightarrow B = 10.268 m$ (mínima base aplicable para cumplir los requisitos)

Superficie abarcada por un modelo estereoscópico

Considerando la zona de levantamiento comprendida entre Y_{max} y Y_{min} =2B, llegamos a que la superficie abarcada por un modelo estereoscópico es:

$$S = (K - 2)B^{2} \left[(K + 2) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - 1 \right] = 6217.252 \, m^{2}$$

Ancho máximo del modelo

El ancho máximo, L, viene definido por:

$$L = B \left(2Ktg \frac{\omega}{2} - 1 \right) = 91.152 \, m$$

Ancho del modelo en la parte delantera de la ladera a levantar

Como conocemos el ancho máximo del modelo, L, se puede deducir fácilmente la distancia [x + 50 m] (Fig. 32). En función de la distancia x, se puede saber cuanto recubre el modelo estereoscópico en la zona delantera de la ladera (l):

$$l = 2 \cdot x \cdot tg \frac{\omega}{2} = 57.790 \, m$$

Número de tomas fotogramétricas

Considerando que se trabaja con modelos estereoscópicos en el caso de toma normal, que la zona que queremos recubrir tiene una longitud de 200 m y que el ancho del modelo en la zona delantera a levantar es l, resulta que el número de pares estereoscópicos necesarios es:

$$Pares = \frac{200 \ m}{l} = 3.46 \approx 4$$

Distancia entre pares estereoscópicos

La distancia máxima entre pares, d_{max} , viene definida por:

$$d_{max} = l - B = 47.522 m$$

Con los datos hasta ahora calculados, ya podemos plasmar el proyecto planimétrico de toma fotogramétrica terrestre (Fig. 32). Ahora bien, se recomienda no apurar la distancia máxima entre tomas para que los posibles defectos de ejecución de la toma no invaliden el levantamiento, por ejemplo generando calvas.

En el proyecto de levantamiento que aparece reflejado en la Fig. 32 existen zonas por la parte superior e inferior en las que se produce recubrimiento estereoscópico y, sin embargo, no presentan interés en cuanto al levantamiento fotogramétrico. Por tanto, se propone repartir el exceso de recubrimiento en los extremos de la zona [sobra(a), sobra(b)], de modo que exista solape entre pares estereoscópicos.

$$Sobra = l \cdot 4 - 200 = 31.16 \, m \Rightarrow [sobra(a) = 15.58 \, m, sobra(b) = 15.58 \, m]$$

Corrección de distancia:

$$\frac{Sobra}{Pares+1} = \frac{31.16 \ m.}{5} = 6.232 \ m$$

y la distancia recomendada entre pares será:

$$d_{rec} = d_{max} - 6.232 \ m = 41.29 \ m$$

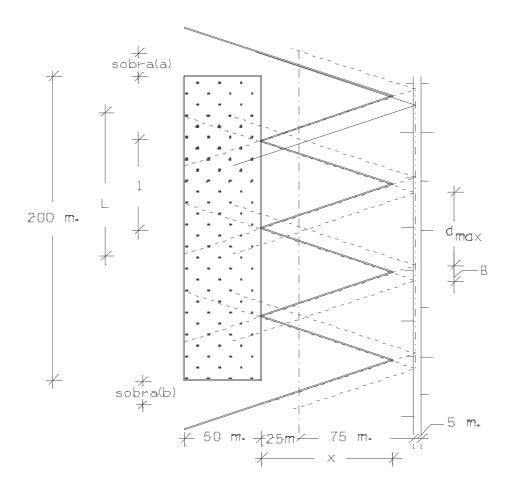


Fig. 32. Datos técnicos necesarios para la toma fotogramétrica terrestre. Representación planimétrica en el caso límite

Véase en la Fig. 33 el resultado conseguido en el levantamiento con esta pequeña modificación. En la práctica, esta corrección equivale a haber disminuido la magnitud *x* una cantidad prudencial (9 *m* aproximadamente).

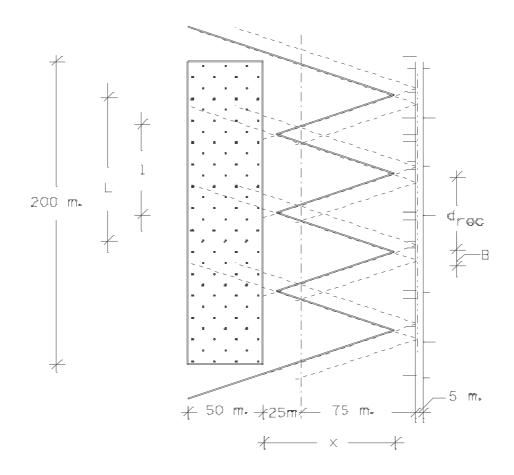


Fig. 33. Datos técnicos necesarios para la toma fotogramétrica terrestre. Solución adoptada

Únicamente faltaría por comprobar si la toma tiene que ser horizontal o ligeramente inclinada. Los factores a tener en cuenta son: la orografía de la zona y el campo vertical de la cámara, β (Fig. 34).

Teniendo en cuenta lo comentado en el párrafo anterior y suponiendo el eje de toma horizontal, para determinar si la zona de levantamiento (en el plano de frente) entra por completo en la superficie útil del fotograma, debemos probar con:

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{H/2}{D} \implies H/2 = D \cdot tg\frac{\beta}{2}$$
 (22)

Por tanto, ahora se consideran los dos casos límite, es decir, distancias D_1 y D_2 (Fig. 34):

1.- Distancia máxima de la cámara fotogramétrica al final de la ladera, $D_1 = Y_{max} = 152 m$, que equivale a una altura sobre el terreno:

$$H_1 = H/2 + h_L + i_L = 48.072 + 20 + 1.5 = 69.572 m$$

2.- Distancia de la cámara fotogramétrica al principio de la ladera, $D_2 = 102 m$, que equivale a una altura sobre el terreno:

$$H_2 = H/2 + h_L + i_L = 32.259 + 20 + 1.5 = 53.759 m$$

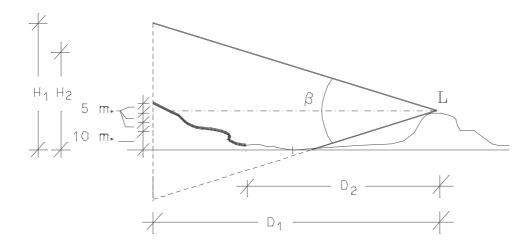


Fig. 34. Perfil transversal del terreno y representación altimétrica de la toma

En ninguno de los dos casos planteados se presenta problema de levantamiento, debido a que el campo visual de la cámara (a las distancias de trabajo) es superior al desnivel de la ladera (22.5 m) y, además, el terreno a levantar está perfectamente encajado en la zona de la toma. Así pues, todo el área a restituir entrará dentro del formato de la cámara y no será preciso inclinar el eje óptico de la cámara. Podemos concluir que el proyecto de toma fotogramétrica normal adoptará la disposición que aparece en la Fig. 33.

TEMA 8 PROBLEMAS PROPUESTOS



EJERCICIO I

En una fotografía vertical con focal de 153 mm y altitud sobre el nivel del mar de 765 m aparecen las imágenes de 2 puntos, a y b, con altitudes conocidas:

$$h_A = 10 m$$
$$h_B = 150 m$$

Medidas sus coordenadas en un monocomparador tenemos que:

$$x_a = 22.35 \text{ mm}$$
 $y_a = -12.36 \text{ mm}$
 $x_b = 85.65 \text{ mm}$ $y_b = 63.88 \text{ mm}$

Calcular la distancia reducida terreno, AB, así como la orientación de dicha alineación.

Solución:

$$AB = 394.621 m$$

 $\theta_A^B = 40^g.4072$

EJERCICIO II

Para determinar la superficie a expropiar de un trozo de una parcela, se dispone de un fotograma a escala 1:5000 obtenido con una distancia focal de 150 mm. Sobre él, se han medido las coordenadas imagen de los puntos correspondientes a las esquinas de la misma, obteniéndose los siguientes valores:

	Coord.	Imagen
Punto	$x_I(mm)$	$y_I(mm)$
1	45.78	79.23
2	46.14	<i>78.69</i>
3	45.89	57.23

Además, a partir de un mapa topográfico se han podido medir las altitudes sobre el nivel del mar de las 3 esquinas, siendo:

- Punto 1: 125 m

- Punto 2: 115 m

- Punto 3: 111 m

La lectura del altímetro en el momento de la toma marcaba 861 m.

Calcular:

- A. Las coordenadas imagen de la parcela a expropiar, corregidas por el efecto orográfico, tomando como plano de referencia el nivel medio del mar.
- B. Superficie reducida terreno de dicha parcela.

Solución:

A.

$$x'_1 = 39.1335 \ mm$$
 $y'_1 = 67.7273 \ mm$
 $x'_2 = 39.9774 \ mm$ $y'_2 = 68.1800 \ mm$
 $x'_3 = 39.9737 \ mm$ $y'_3 = 49.8516 \ mm$

B.

$$S_{123} = 254.7 \ m^2$$

EJERCICIO III

Se ha realizado la medición de las coordenadas cliché de las marcas fiduciales y de un punto P, obteniéndose los siguientes resultados:

Punto	$x_K(mm)$	y_K (mm)
1	36.941	106.508
2	39.426	10.537
3	0.190	57.535
4	76.169	59.488
P	44.437	51.033

La distancia entre marcas fiduciales opuestas es de 76 mm y de 96 mm.

Calcular:

- A. Distancia y acimut entre las marcas fiduciales opuestas.
- B. Factor de distorsión del fotograma en cada eje y ángulo de distorsión entre los ejes.

- C. Coordenadas del centro fiducial.
- D. Coordenadas fiduciales del punto P.

Solución:

A.

$$d_1^2 = 96.00316696 \text{ mm.}; \qquad \theta_1^2 = 198^g.3520$$

$$d_3^4 = 76.00409627 \text{ mm.}; \qquad \theta_3^4 = 98^g.3640$$

B.

$$F_{1,2} = 0.9999670119$$

$$F_{3,4} = 0.9999461046$$

$$\delta = 0^{g}.0120$$

C.

$$x_{C.F.} = 38.1837 \ mm$$

$$y_{C.F.} = 58.5116 \ mm$$

D.

$$x_F = 6.059 \ mm$$

$$y_F = -7.642 \ mm$$

EJERCICIO IV

En un restituidor digital se han medido las coordenadas digitales de las marcas fiduciales de una diapositiva de formato $9~\rm cm~x~12~cm$ que se ha escaneado a $1600~\rm d.p.i.$

Sabiendo que las coordenadas son:

COORD. CALIBRADAS			COORD. DIGITALES		
Punto	$x_f(mm)$	y _f (mm)	x_D (pix.)	y_D (pix.)	
1	81.558	0.000	10799.560	4026.420	
2	0.000	<i>57.346</i>	5627.600	399.940	
3	-81.558	0.000	474.440	4017.510	
4	0.000	-57.346	5652.130	7621.380	

- A. Calcular la transformación afín bidimensional que relaciona las coordenadas digitales de las marcas fiduciales con las coordenadas fiduciales.
- B. Obtener los parámetros de la matriz de afinidad.

Solución:

A.

Parámetro, $Tx = -88.86062114111 \ mm$

Parámetro, a = 0.01579801999

Parámetro, b = -0.00005364329

Parámetro, $Ty = 63.71033365600 \, mm$

Parámetro, c = 0.00001369560

Parámetro, d = -0.01588211957

В.

Factor de escala *X*, Sx = 0.0157980259

Factor de escala *Y*, Sy = -0.0158822102

Giro, $\theta = 0^{g}.0552$

Ángulo de falta de perpendicularidad, $\delta = 0^{g}.2702$

EJERCICIO V

En un monocomparador se han medido las coordenadas cliché de las marcas fiduciales de una diapositiva de formato 18 cm x 13 cm que se encontraba en el portaplacas, así como la coordenada de un punto Q. Sabiendo que las coordenadas son:

Punto	x_F (mm)	$y_F(mm)$	$x_K(mm)$	$y_K(mm)$
1	81.558	0.000	443.839	156.444
2	0.000	57.346	365.434	218.076
3	-81.558	0.000	281.027	164.992
4	0.000	-57.346	359.434	103.361
$oldsymbol{arrho}$	-	-	290.090	210.100

Se pide:

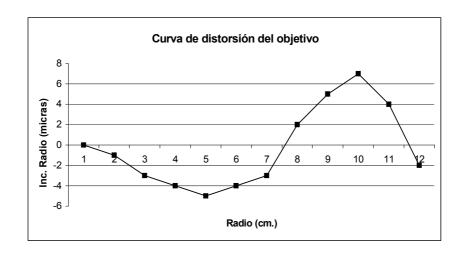
A. Si las coordenadas del punto principal de la cámara referidas al sistema de coordenadas fiduciales son:

$$x_0 = 0.011 \ mm$$

$$y_0 = 0.009 \ mm$$

Calcular las coordenadas transformadas del punto Q.

B. Sabiendo que la distorsión radial del objetivo se ajusta a la siguiente curva:



Calcular las coordenadas transformadas del punto ${\it Q}$ corregidas de distorsión del objetivo.

Solución:

A.

$$x_T = -74.872 \ mm$$
 $y_T = 45.441 \ mm$

B.

$$x'_T = -74.869 \ mm$$
 $y'_T = 45.439 \ mm$

EJERCICIO VI

En un restituidor digital se desea realizar la orientación interna de un fotograma de aérea (formato 23 cm x 23 cm) escaneado a 28 µ. Para ello se han medido las coordenadas digitales de las ocho marcas fiduciales, así como de tres puntos aislados:

Punto	$x_D(pix.)$	<i>y_D (pix.)</i>
1	8075.426	4095.581
2	7930.504	309.335
3	4144.547	168.514
4	358.202	313.466
5	217.922	4099.183
6	362.819	<i>7885.532</i>
7	4148.839	<i>8026.793</i>
8	<i>7934.417</i>	<i>7881.919</i>
100	5524.136	<i>785.448</i>
101	5000.783	4998.217
102	1025.654	2512.729

Las coordenadas calibradas de las marcas fiduciales son:

Punto	$x_F(mm)$	$y_F(mm)$
1	110.002	0.002
2	105.998	106.003
3	0.002	110.006
4	-106.000	106.003
5	-109.998	0.003
6	-105.997	-106.001
7	-0.001	-110.014
8	106.000	-106.002

La altitud de vuelo es de 3500 m y la altitud media del terreno 615 m.

La distancia focal de la cámara es de 153.069 mm, y las coordenadas del punto principal de la cámara referidas al sistema de coordenadas fiduciales son:

$$x_0 = 0.011 \ mm$$

$$y_0 = 0.006 \ mm$$

La distorsión radial de la lente se ajusta a la siguiente función polinómica:

$$\Delta r = k_1 r + k_2 r^3 + k_3 r^5 + k_4 r^7$$

siendo:

- $-k_1 = 1.99697*10^{-4}$
- $k_2 = 1.94801*10^{-7}$
- $k_3 = -1.97388*10^{-11}$
- $k_4 = 4.39338*10^{-16}$

Calcular:

- A. Las coordenadas fiduciales de los puntos: 100,101 y 102.
- B. Las coordenadas transformadas de los tres puntos anteriores.
- C. Las coordenadas imagen de los tres puntos anteriores.

Solución:

1	۱		
Γ	3	١	•

Punto	$x_F(mm)$	$y_F(mm)$
100	38.621	92.712
101	23.903	-25.229
102	-87.355	44.414

B.

Punto	$x_T(mm)$	$y_T(mm)$
100	38.610	92.706
101	23.892	-25.235
102	-87.366	44.408

C.

Punto	$x_I(mm)$	$y_I(mm)$
100	38.588	92.654
101	23.881	-25.224
102	-87.314	44.382

EJERCICIO VII

Se ha realizado una toma fotogramétrica terrestre que tiene las siguientes características:

- Fototeodolito de distancia focal: 190 mm.
- Formato: 18 cm x 13 cm.
- Toma convergente: giro de la cámara derecha 20^g.15 a la izquierda.
- Base estereoscópica: 13.05 m.

Las coordenadas transformadas del punto Q son:

Fotograma izquierdo	Fotograma derecho
$x_Q = -37.054 \ mm$	$x'_{Q} = -31.018 \ mm$
$y_Q = -38.549 \ mm$	$y'_{Q} = -$

Calcular:

A. Coordenadas terreno del punto Q en el sistema relativo definido por la base estereoscópica, tomando como coordenadas del CDP izquierda (L):

$$X_L = 0 m;$$
 $Y_L = 0 m;$ $Z_L = 0 m$

B. Sabiendo que el acimut topográfico del eje principal de la cámara izquierda es 15^g.50, y que las coordenadas absolutas del punto L son:

$$X_L = 100 \text{ m}; \quad Y_L = 50 \text{ m}; \quad Z_L = 10 \text{ m}$$

Obtener las coordenadas del punto Q en el sistema absoluto de referencia definido.

Solución:

A.

$$X_Q = -7.868 m$$

 $Y_Q = 40.342 m$
 $Z_Q = -8.185 m$

В.

$$X'_{Q} = 102.090 m$$

 $Y'_{Q} = 91.049 m$
 $Z'_{Q} = 1.815 m$

EJERCICIO VIII

Se dispone de una toma fotogramétrica terrestre desviada 2^g a la izquierda. La distancia focal de la cámara métrica empleada es 120 mm. Las coordenadas del centro de proyección izquierda L son (0,0,1.6)m y la distancia reducida de la base L-L' es de 9 m.

A partir de las coordenadas transformadas de los puntos A, B, C:

Fotograma izquierdo Fotograma derecho $x_a = -5.635 \text{ mm}; \ y_a = -5.214 \text{ mm}$ $x_b = 29.439 \text{ mm}; \ y_b = -5.325 \text{ mm}$ $x_c = -5.639 \text{ mm}; \ y_c = 26.418 \text{ mm}$ $x_c^2 = -32.417 \text{ mm}; \ y_c^2 = 26.418 \text{ mm}$ $x_c^2 = -32.417 \text{ mm}; \ y_c^2 = 26.418 \text{ mm}$

Calcular:

- A. Las coordenadas terreno de los puntos A, B, C en el sistema de coordenadas definido por la base estereoscópica.
- B. Anchura media y altura máxima de la fachada definida a partir de los 3 puntos anteriores.

Solución:

A.

$$X'_{A} = -3.131 m$$

 $Y'_{A} = 39.885 m$
 $Z'_{A} = -0.136 m$
 $X'_{B} = 6.282 m$
 $Y'_{B} = 29.598 m$
 $Z'_{B} = 0.296 m$
 $X'_{C} = -3.133 m$
 $Y'_{C} = 39.888 m$
 $Z'_{C} = 10.399 m$

B.

Anchura media de la fachada = 13.946 mAltura máxima de la fachada = 10.535 m

EJERCICIO IX

Se ha realizado una toma fotogramétrica que tiene las siguientes características:

- Fototeodolito de distancia focal: 190 mm.
- Formato: 18 cm x 13 cm.
- Toma convergente: giro de la cámara derecha 20^g.15 a la izquierda.
- Base estereoscópica: 13.05 m.
- La toma derecha está inclinada +2^g (sobre el plano horizontal) respecto a la cámara izquierda
- Desnivel centro de proyección derecha-izquierda: 0.20 m.

En un monocomparador se han medido las coordenadas cliché de las 4 marcas fiduciales y la coordenada de un punto P. Sabiendo que las coordenadas son:

	Coord. Fiduciales		C. Cliché Izquierdo		C. Cliché Derecho	
Punto	$x_F(mm)$	y_F (mm)	$x_K(mm)$	$y_K(mm)$	$x_K(mm)$	$y_K(mm)$
1	81.558	0.000	38.517	-31.670	243.839	-43.556
2	0.000	57.346	45.839	21.459	165.434	18.076
3	-81.558	0.000	-124.199	-40.227	81.027	-35.008
4	0.000	-57.346	39.842	-93.354	159.434	-96.639
P	-	-	<i>-77.785</i>	<i>-76.486</i>	129.290	<i>-79.456</i>

Calcular:

A. Las coordenadas transformadas del punto P. sabiendo que las coordenadas del punto principal de la cámara referidas al sistema de coordenadas fiduciales son:

$$x_0 = 0.003 \text{ mm}; \quad y_0 = -0.005 \text{ mm}$$

B. Coordenadas terreno del punto P en el sistema relativo definido por la base estereoscópica, tomando como coordenadas del punto L:

$$X_L = 0 m; \quad Y_L = 0 m; \quad Z_L = 0 m$$

C. Sabiendo que el acimut topográfico del eje principal de la cámara izquierda es 15^g.50, y que las coordenadas absolutas del punto L son:

$$X_L = 100 \text{ m}; \quad Y_L = 50 \text{ m}; \quad Z_L = 10 \text{ m}$$

Obtener las coordenadas del punto P en el sistema absoluto de referencia definido.

Solución:

A.

Fotograma izquierdo

$$x_T = -37.054 \ mm$$

$$y_T = -38.549 \ mm$$

Fotograma derecho

$$x_T = -31.018 \ mm$$

$$y_T = -41.786 \ mm$$

B.

$$X_P = -7.899 m$$

$$Y_P = 40.503 \ m$$

$$Z_P = -8.218 m$$

C.

$$X'_P = 102.098 m$$

$$Y'_P = 87.404 m$$

$$Z'_{P} = 1.782 m$$

EJERCICIO X

Se desea obtener un plano de detalle a escala 1:50 de una fachada y de una torre de una iglesia (véase croquis adjunto). Previamente al trabajo de campo, se requiere diseñar la configuración óptima de toma fotogramétrica terrestre para el trabajo encomendado.

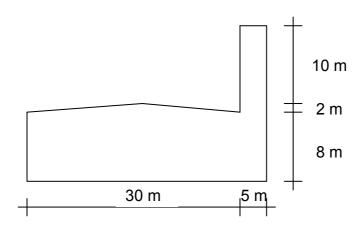
La cámara métrica a utilizar tiene las siguientes características: distancia focal de 64 mm; ángulo campo horizontal 52^g ; ángulo campo vertical de 70^g , y altura de la cámara fija sobre trípode a 1.50 m.

La restitución se llevará a cabo con un restituidor analítico de 1^{er} orden; el error en la determinación de paralajes es de 5 μ .

Se limita por condiciones de máxima precisión a una relación máxima distancia/base de 10.

Se pide:

Diseñar y plasmar gráficamente las tomas de terrestre necesarias para el trabajo requerido.



Solución:

Valor adoptado de
$$K = 10 \implies Y_{max} = 10 m$$

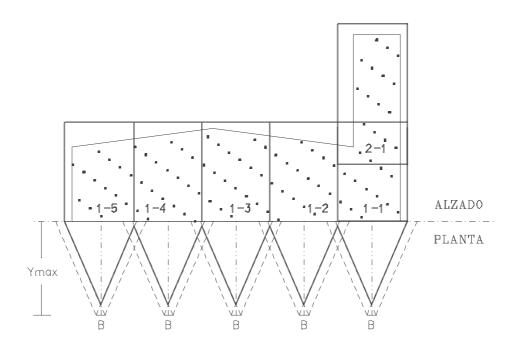
 $B = 1 m$

Número de pasadas: 2.

Número de pares (modelos estereoscópicos) por pasada:

- Inferior: 5. Inclinación fijada del eje de toma, 12^g. Mínima inclinación requerida, 10^g.
- Superior: 1. Inclinación fijada del eje de toma, 35^g. Mínima inclinación requerida, 33.5^g.

Gráfico a escala del levantamiento fotogramétrico terrestre:



BIBLIOGRAFÍA

American Society of Photogrammetry, Manual of Photogrammetry, Cuarta edición, 1980.
Chueca Pazos, M., <i>Topografía</i> , Tomo II. Editorial Dossat, 1982.
Kraus, K., <i>Photogrammetry. Volume I, Fundamentals and Standard Processes</i> , Cuarta edición. Editorial Dümmler, 1993.
Kraus, K., <i>Photogrammetry. Volume II, Advanced Methods and Applications</i> , Cuarta edición. Editorial Dümmler, 1997.
Lerma García, J.L., Problemas de Fotogrametría II. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
Lerma García, J.L., Problemas de Fotogrametría III. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
Lerma García, J.L., Aerotriangulación: Cálculo y Compensación de un bloque fotogramétrico. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
Moffit, F.H., Mikhail, E.M., <i>Photogrammetry</i> , Tercera Edición. Editorial Har per & Row, 1980.
Ruiz Morales, M., <i>Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría. Colección de ejercicios</i> . Universidad de Granada, 1994.
Strandberg, C.H., Manual de Fotografia aérea. Editorial Omega, 1975.
Váquez Maure, F., Martín López, J., <i>Fotointerpretación</i> . Instituto Geográfico Nacional, 1988.
Wolf, P.R., Elements of Photogrammetry, with air photo interpretation and remote sensing. Segunda Edición. Editorial McGraw-Hill. 1983.